

Freiburg im Br 1901

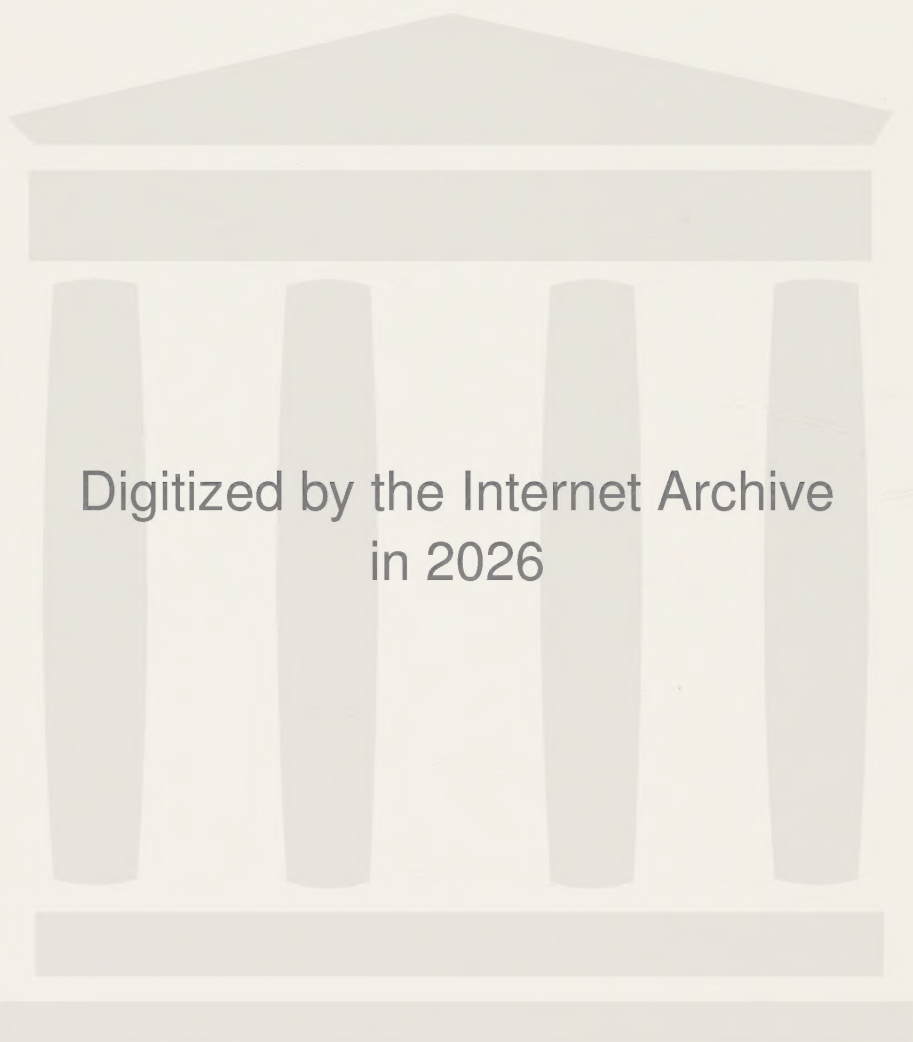
R o l f M ü l l e r

HILBERTSCHE MODULFORMEN UND MODULFUNKTIONEN

ZU $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ UND $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$

Dissertation

1901



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545301_0004

R o l f M ü l l e r

HILBERTSCHE MODULFORMEN UND MODULFUNKTIONEN

ZU $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ UND $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$



Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg im Breisgau

1981

Dekan: Prof. Dr. D. Wolke
Referent: Prof. Dr. H. Klingen
Korreferent: Prof. Dr. J. Wolfart

Datum der Promotion:



Umseitige Abbildung:

Tetradrachme von Abdera um 430 v. Chr., mit Namen des Münzmeisters Pythagoras (Umschrift) und mutmaßlichem Porträt des Philosophen und Mathematikers Pythagoras von Samos (gestorben um 500 v. Chr.).

INHALT

	Seite
Einleitung	2
§ 1 Bezeichnungen, Präliminarien	5
1.1. Siegelsche Modulformen, Thetareihen	5
1.2. Hilbertsche Modulformen zu reellquadratischen Zahlkörpern	8
1.3. Modulare Einbettung, Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$	14
§ 2 Konstruktion Hilbertscher Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ mittels Thetareihen	20
2.1. Vorbereitungen, Thetareihen zu reellquadratischen Zahlkörpern	20
2.2. Der Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$	25
2.3. Der Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$, Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$	27
§ 3 Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$	31
3.1. Elementarer Beweis des Struktursatzes für $R[\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}]$	31
3.2. Beweis des Struktursatzes für $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ mittels der Igusa-Relation für χ_{35}	38
3.3. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$	44
§ 4 Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	48
Literatur	53

E I N L E I T U N G

*Mais je n'ai que faire de mathématiques;
il me prendrait pour une proposition.*

B. Pascal

Zu den wichtigsten Problemen in der Theorie der Modulformen gehört die Bestimmung der genauen algebraischen Struktur der von ihnen gebildeten graduierten Ringe.

Während im klassischen Falle einer Variablen (elliptische Modulformen) die Struktur des graduierten Ringes dieser Modulformen bereits seit mehr als 100 Jahren bekannt ist, konnte das Problem in mehreren Variablen (Hilbertsche, Siegelsche, Hermitesche Modulformen) erst im Verlauf der letzten 20 Jahre in einigen wenigen Fällen ganz oder zumindest teilweise gelöst werden, worüber die Einleitung bei Resnikoff, Tai [39] einen guten Überblick gibt. Ergänzend dazu seien noch die Arbeiten von Hirzebruch [22] (Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$) und Hermann [19] (symmetrische Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$) genannt.

Vollständige Resultate, d.h. Kenntnis eines minimalen Erzeugendensystems des Ringes aller Modulformen beliebigen Gewichts und beliebigen Multiplikatorsystems zur vollen Modulgruppe *und* der zwischen den Erzeugenden bestehenden Relationen, besitzt man im Falle mehrerer Variabler bislang überhaupt nur in den drei folgenden Fällen:

1. für den Ring der Siegelschen Modulformen vom Grad 2 (Igusa [28]),
2. für den Ring der Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (Gundlach [11], vervollständigt von Resnikoff [37]; Hirzebruch [21], [22]),
3. für den Ring der Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$. Hier gab Gundlach [13] Erzeugende des Ringes an, und Hirzebruch [22] bestimmte auf anderem Wege darüberhinaus auch die zwischen den Erzeugenden bestehenden Relationen. Seine Ergebnisse sind jedoch nicht ganz korrekt, wie in [35] bemerkt wurde, sondern enthalten ein kleines Versehen, das in dieser Arbeit berichtigt wird.

In allen Fällen erwies sich insbesondere die Bestimmung der Relationen zwischen den Erzeugenden als schwierig und erforderte Hilfsmittel aus der Invariantentheorie ([28] und (indirekt) [37], [35]) bzw. aus der algebraischen Geometrie ([21], [22]).

In der vorliegenden Arbeit werden die vollständigen Struktursätze für die Ringe der Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ auf elementarem Wege ohne Anleihen aus der Invariantentheorie oder algebraischen Geometrie

bewiesen. Zugleich wird gezeigt, daß sich sämtliche Erzeugende dieser beiden Ringe explizit durch Thetanullwerte darstellen lassen, womit die völlige Analogie zum Siegelschen Fall für $n = 1$ (klassisch) und $n = 2$ (Igusa [26], [28]) hergestellt ist.

Methodisch lehnt sich die Arbeit an Hammond [14] und - etwas stärker - an die elementarerer Teile bei Gundlach [11], [13] an. Dessen inzwischen mehrfach ([3], [14], [37], [19], [35]) benutzte Idee, die klassische Beweismethode zur Strukturbestimmung des Rings der elliptischen Modulformen (Rolle der Diskriminante Δ) auf einen höherdimensionalen Fall zu verallgemeinern (vgl. [11]), spielt auch hier eine wesentliche Rolle. Daneben ist, insbesondere für die Bestimmung der Relationen, die Methode des Fourierkoeffizientenvergleichs von Bedeutung.

Aus der allgemeinen Theorie werden nur grundlegende Dinge benötigt. So wird z.B. ausschließlich mit der vollen Modulgruppe gearbeitet; Betrachtungen von Kongruenzuntergruppen und deren Fundamentalbereichen sowie komplizierte Untersuchungen in den Spitzen derselben, wie sie etwa bei Gundlach ([11], [13]) oder besonders in den Arbeiten von Hirzebruch, van der Geer und Zagier ([20], [21], [22], [24], [5], [6]) auftreten, konnten durchweg vermieden werden.

Ein weiteres wichtiges Problem ist die Strukturbestimmung der Körper der Modulfunktionen. Auch hier wurden im mehrdimensionalen Fall erst in neuerer Zeit und nur in einigen Fällen wieder größere Fortschritte gemacht. So konnte etwa die Rationalität der Körper der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ erst innerhalb der letzten 10 Jahre gezeigt werden (Freitag [4], Hammond [15], Hirzebruch [20]), wobei die Beweise aber einen beträchtlichen Aufwand an tiefliegenden Hilfsmitteln aus der algebraischen Geometrie erforderten und zudem nicht gestatteten, eine Transzendenzbasis explizit anzugeben. In der vorliegenden Arbeit wird nun die Rationalität der beiden Funktionenkörper *konstruktiv* mit expliziter Angabe einer Transzendenzbasis auf elementarem und sehr kurzem Wege bewiesen, wobei die Struktursätze für die Ringe der Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ wesentlich in die Beweisführung eingehen.

In § 1 werden Bezeichnungen, grundlegende Definitionen und später benötigte Resultate, wie etwa der Begriff der modularen Einbettung und der Struktursatz für den Ring der symmetrischen Hilbertschen Modulformen geraden Gewichts zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (Hammond [14]), zusammengestellt.

In § 2 werden die später als Erzeugende der entsprechenden Ringe benötigten Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ mittels Thetareihen

konstruiert und der Struktursatz für den Ring der symmetrischen Modulformen geraden Gewichts mit trivialem Multiplikatorsystem zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ (Hammond [14]) formuliert. Die Darstellung der im Erzeugendensystem des Rings der Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ auftretenden Spitzenform s_{15} vom Gewicht 15 durch Thetareihen wurde mit Hilfe eines Computers gefunden; daß der ermittelte Ausdruck die gewünschten Eigenschaften besitzt, kann indes ohne weiteres von Hand nachgeprüft werden. Im übrigen wird dieses Resultat für das eigentliche Ziel, die Bestimmung der quadratischen Relation, der die Spitzenform s_{15} genügt, nicht benötigt.

§ 3 bringt im ersten Abschnitt einen elementaren Beweis des vollständigen Struktursatzes für den Ring aller Hilbertschen Modulformen beliebigen Gewichts und beliebigen Multiplikatorsystems zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$. Im zweiten Abschnitt wird ein von Resnikoff [37] zur Gewinnung des entsprechenden Struktursatzes für den Ring der Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ angewandtes Verfahren auf den Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ übertragen, wobei man allerdings, wie etwas ausführlicher bereits in [35] dargestellt wurde, lediglich den Struktursatz für den Ring der symmetrischen Modulformen beliebigen Gewichts mit trivialem Multiplikatorsystem zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ erhält. Im letzten Abschnitt von § 3 wird die Rationalität des Körpers der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ konstruktiv nachgewiesen und eine Transzendenzbasis explizit angegeben.

In § 4 wird die einzige zwischen den Erzeugenden des Rings der Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bestehende Relation, nämlich die quadratische Relation für die Spitzenform s_{15} , auf elementarem Wege bestimmt und ein elementarer Rationalitätsbeweis mit expliziter Angabe einer Transzendenzbasis für den Körper der Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ geführt.

Herrn Professor H. Klingen danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit. Ferner danke ich Herrn Professor F. Hirzebruch für ein Gespräch, in dem das Versehen in [22] geklärt werden konnte, Herrn S. Böcherer für einen nützlichen Hinweis sowie den Herren J. Garms und R. Zimbel für das Erstellen des Computerprogramms.

§ 1 BEZEICHNUNGEN, PRÄLIMINARIEN

1.1. Siegelsche Modulformen, Thetareihen

$\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ bezeichne die natürlichen Zahlen ohne bzw. mit Null und $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ wie üblich die ganzzahligen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden kommutativen Ring R mit Eins bezeichne $M(n, R)$ den Ring aller n -reihigen Matrizen über R , $GL(n, R)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente in $M(n, R)$ und $Sp(n, R)$ die symplektische Gruppe vom Grad n über R , die besteht aus allen $M \in M(2n, R)$, welche die Matrixgleichung

$${}^t M I M = I \quad \text{mit} \quad I = I_n := \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen, wobei ${}^t M$ die Transponierte von M und O , E die n -reihige Null- bzw. Einheitsmatrix bezeichne. Für eine $n \times n$ -Matrix A und eine $n \times m$ -Matrix B werde die $m \times m$ -Matrix ${}^t BAB$ mit $A[B]$ bezeichnet; $\sigma(A)$, $\det(A)$ bezeichne die Spur bzw. die Determinante von A und $A > 0$, $A \geq 0$ bedeute, daß A positiv definit bzw. positiv semidefinit ist. Auf dem Siegelschen Halbraum n -ten Grades $H_n := \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid Z = {}^t \bar{Z}, \operatorname{Im}(Z) > 0\}$ ($\operatorname{Im}(Z)$ = Imaginärteil von Z) operiert die Siegelsche Modulgruppe n -ten Grades $\Gamma_n := Sp(n, \mathbb{Z})$ vermöge

$$\Gamma_n \times H_n \rightarrow H_n, \quad (M, Z) \mapsto M \langle Z \rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

A, B, C, D n -reihig, als diskontinuierliche Gruppe biholomorpher Automorphismen. Eine holomorphe Funktion $f: H_n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Siegelsche Modulform n -ten Grades (oder Modulform zu Γ_n) vom Gewicht k ($k \in \mathbb{Z}$) mit Multiplikatorsystem ν (ν ein abelscher Charakter von Γ_n), wenn sie für alle $M \in \Gamma_n$, $Z \in H_n$ dem Transformationsgesetz

$$f(M \langle Z \rangle) = \nu(M) j(M, Z)^k f(Z) \quad \text{mit} \quad j(M, Z) := \det(CZ + D)$$

genügt und für $n = 1$ zusätzlich in jedem Bereich $H_n(c) := \{Z \in H_n \mid \operatorname{Im}(Z) \geq c \cdot E\}$ ($c > 0$) beschränkt ist, eine Bedingung, die für $n > 1$ bekanntlich automatisch erfüllt ist. f besitzt eine in jedem Bereich $H_n(c)$ ($c > 0$) absolut gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung

$$f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(f, T) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \sigma(TZ)\right),$$

wobei über alle n -reihigen halbganzen symmetrischen semipositiven Matrizen T summiert wird und $q \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $\nu^q \equiv 1$ gewählt ist; also $q = 1$ für das triviale Multiplikatorsystem und $q = 2$ sowohl für das nichttriviale Multiplikatorsystem im Falle $n = 2$ als auch für das einzige nichttriviale reelle Multiplikatorsystem im Falle $n = 1$ (vgl. Klingen [30], S. 177),

die beide mit v_0 bezeichnet seien. Ist $a(f,T) \neq 0$ höchstens für $T > 0$, so heißt f Spitzenform.

Für $Z \in H_n$ und Spalten $a, b \in \mathbb{C}^n$ heißt die in jedem Bereich $H_n(c)$ ($c > 0$) absolut gleichmäßig konvergente, also in ganz H_n holomorphe Reihe

$$\vartheta(Z; a, b) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i (Z[g + \frac{1}{2}a] + {}^t g b)}$$

Thetareihe (genauer: Thetanullwert oder Thetakonstante) n -ten Grades zur Charakteristik (a, b) . Die Reihen haben offenbar die Eigenschaft

$$(1) \quad \vartheta(Z; a+2g_1, b+2g_2) = e^{-\pi i {}^t g_1 b} \vartheta(Z; a, b) \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in \mathbb{Z}^n$$

und weisen bezüglich der Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad T_S := \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad V_U := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^t U^{-1} \end{pmatrix} \quad (S = {}^t S \in M(n, \mathbb{Z}), U \in GL(n, \mathbb{Z})),$$

die bekanntlich Γ_n erzeugen (Witt [45], Satz C, S. 335), das folgende für alle $Z \in H_n$, $a, b \in \mathbb{C}^n$ gültige Transformationsverhalten auf (Eichler [2], S. 55-59):

$$\begin{aligned} (i) \quad & \vartheta(V_U \langle Z \rangle; a, b) = \vartheta(Z[{}^t U]; a, b) = \vartheta(Z; {}^t U a, U^{-1} b) \\ (2) \quad (ii) \quad & \vartheta(T_S \langle Z \rangle; a, b) = \vartheta(Z + S; a, b) = e^{\frac{\pi i}{4} S[a]} \vartheta(Z; a, b + S a + (S)_0) \\ & (iii) \quad \vartheta(I \langle Z \rangle; a, b) = \vartheta(-Z^{-1}; a, b) = e^{-\frac{\pi i}{2} {}^t a b} \det(-iZ)^{1/2} \vartheta(Z; -b, a), \end{aligned}$$

wobei $(S)_0$ die aus den Diagonalelementen von $S = (s_{ij})$ gebildete Spalte ${}^t(s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn})$ bezeichne und in (iii) für rein imaginäres Z die Quadratwurzel positiv zu ziehen ist, womit der Wurzelzweig wegen des einfachen Zusammenhangs von H_n eindeutig festliegt. Für die Charakteristiken (a, b) führt man die Kongruenzbedingungen

$$2a \equiv 2b \equiv 0 \pmod{2} \quad (\Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}^n)$$

ein, wobei als Koeffizienten der Repräsentanten a, b des dadurch bestimmten Restklassensystems mod 2 gemäß der üblichen Normierung nur 0 und 1 auftreten sollen. Ist ${}^t a b \equiv 0 \pmod{2}$, so heißt die Charakteristik (a, b) gerade, sonst, d.h. für ${}^t a b \equiv 1 \pmod{2}$, ungerade. Ein Thetanullwert verschwindet genau dann identisch, wenn seine Charakteristik ungerade ist (Igusa [29], Theorem 1, S. 174). Aus der Definition der Reihen $\vartheta(Z; a, b)$ folgt unmittelbar die Beziehung

$$(3) \quad \vartheta \left(\begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \prod_{i=1}^n \vartheta_{a_i b_i}(z_i) \quad \text{mit } \vartheta_{a_i b_i}(z_i) := \vartheta(z_i; a_i, b_i) \\ (z_i \in H_1)$$

zwischen den Thetareihen vom Grad n und denen vom Grad 1 , den elliptischen Thetareihen. Im Falle $n = 1$ gibt es genau 3 Reihen gerader Charakteristik: ϑ_{00} , ϑ_{01} , ϑ_{10} , für die in der Literatur (z.B. bei Rankin [36]) auch die fortan verwendete Notation

$$(4) \quad \vartheta_2 = \vartheta_{10}, \quad \vartheta_3 = \vartheta_{00}, \quad \vartheta_4 = \vartheta_{01}$$

üblich ist. Im Falle $n = 2$ gibt es genau 10 Reihen gerader Charakteristik, für die das zugehörige Repräsentantensystem der Charakteristiken wie folgt durchnummeriert sei:

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_a	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,1)
t_b	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,1)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)

Die Reihe $\vartheta(Z; a, b)$, deren Charakteristik (a, b) die Nummer i hat, werde fortan auch mit ϑ_i bezeichnet.

Das Produkt dieser 10 Reihen

$$(6) \quad \theta := \prod_{i=0}^9 \vartheta_i$$

ist eine nichttriviale Spitzenform vom Gewicht 5 zum nichttrivialen Multiplikatorsystem v_0 von Γ_2 , deren genaues Nullstellengebilde $\mathcal{N}_\theta$ lautet:

$$(7) \quad \mathcal{N}_\theta = \bigcup_{M \in \Gamma_2} M \langle \mathcal{N} \rangle, \quad \text{wobei } \mathcal{N} := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in H_2 \mid z_2 = 0 \right\}$$

die Diagonalebene von H_2 ist und alle Nullstellen von θ die Ordnung 1 haben (vgl. Freitag [3], Satz 1).

1.2. Hilbertsche Modulformen zu reellquadratischen Zahlkörpern

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante D , $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen in K , $\mathcal{O}^\times$ die Einheitengruppe in $\mathcal{O}$, ε die Grundeinheit und $\mathfrak{d} = (\sqrt{D})$ die Differenten von K . Für $\alpha \in K$ bezeichne α' die zu α konjugierte Zahl, $\text{Sp}(\alpha) = \alpha + \alpha'$ die Spur und $\text{Nm}(\alpha) = \alpha \cdot \alpha'$ die Norm von α . $\alpha \gg 0$ bedeute α total positiv, d.h. $\alpha, \alpha' > 0$ und $\alpha \gg 0$ entsprechend $\alpha, \alpha' \geq 0$. Für jedes $u \in \mathbb{Z}$ mit $u \equiv D \pmod{2}$ ist das Paar $1, \omega := \frac{u + \sqrt{D}}{2}$ eine Ganzheitsbasis von K ($= \mathbb{Z}$ -Basis von $\mathcal{O}$). Auf dem Produkt $H_1^2 = \{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \mid \zeta_1, \zeta_2 \in H_1 \}$ der oberen Halbebene mit sich selbst operiert die (engere) Hilbertsche Modulgruppe $\Gamma_K := \text{SL}(2, \mathcal{O}) = \text{Sp}(1, \mathcal{O})$ zum Zahlkörper K vermöge

$$\Gamma_K \times H_1^2 \rightarrow H_1^2, \quad (\mu, \zeta) \mapsto \mu \langle \zeta \rangle := \left(\frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta}, \frac{\alpha' \zeta_2 + \beta'}{\gamma' \zeta_2 + \delta'} \right) \quad \text{mit } \mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

als diskontinuierliche Gruppe biholomorpher Automorphismen. Rechnungen mit Elementen aus $K(\zeta)$, also mit rationalen Funktionen von ζ mit Koeffizienten aus K , sind stets als simultane Rechnungen wie z.B.

$$\text{Sp}(v\zeta) = v\zeta_1 + v'\zeta_2 \quad \text{und} \quad \text{Nm}(v\zeta) = v\zeta_1 \cdot v\zeta_2 \quad \text{für } v \in K, \zeta \in H_1^2$$

aufzufassen. Eine holomorphe Funktion $f: H_1^2 \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Hilbertsche Modulform zu K (oder Modulform zu Γ_K) vom Gewicht k ($k \in \mathbb{Z}$) mit Multiplikatorsystem ν (ν ein abelscher Charakter von Γ_K), wenn sie für alle $\mu \in \Gamma_K$, $\zeta \in H_1^2$ das Transformationsgesetz

$$f(\mu \langle \zeta \rangle) = \nu(\mu) j(\mu, \zeta)^k f(\zeta) \quad \text{mit} \quad j(\mu, \zeta) := \text{Nm}(\gamma \zeta + \delta)$$

erfüllt. f besitzt eine in jedem Bereich $H_1^2(c) := \{ \zeta \in H_1^2 \mid \text{Im}(\zeta_1), \text{Im}(\zeta_2) \geq c \}$ ($c > 0$) absolut gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung

$$(8) \quad f(\zeta) = \sum_{\substack{v \in \mathfrak{b}^{-1} \\ v \gg 0}} a(f, v) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \text{Sp}(v\zeta)\right),$$

wobei $q \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $v^q \equiv 1$, also $q = 1$ für $v = 1$, gewählt ist. Ein solches q existiert stets, da die Faktorkommutatorgruppe von Γ_K endlich ist, vgl. Grosche [9], Lemma 1, S. 189. Hat K wie im Falle $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ Klassenzahl 1, also nur eine einzige (durch ∞ repräsentierbare) Äquivalenzklasse von Spitzen, so heißt f Spitzenform, wenn $a(f, 0) = 0$ ist.

Der von den Modulformen zu $\Gamma = \Gamma_n, \Gamma_K$ vom Gewicht k mit Multiplikator-
system v gebildete, stets endlichdimensionale $\mathbb{C}$ -Vektorraum werde mit (Γ, k, v)
bzw., wenn es sich um das triviale Multiplikatorsystem $v = 1$ handelt, mit
 (Γ, k) , die entsprechenden Unterräume der Spitzenformen mit $(\Gamma, k, v)_0$ bzw.
 $(\Gamma, k)_0$ bezeichnet. Es gilt stets $\dim(\Gamma, k, v) = 0$ für alle negativen $k \in \mathbb{Z}$,
 $\dim(\Gamma, 0) = 1$ und $\dim(\Gamma, 0, v) = 0$ für $v \neq 1$. Sind $v_1 = 1, v_2, \dots, v_r$ ($r \in \mathbb{N}$)
sämtliche Charaktere von Γ , so bezeichne $[\Gamma, k] := (\Gamma, k, v_1) \oplus \dots \oplus (\Gamma, k, v_r)$
die Gesamtheit aller Modulformen zu Γ vom Gewicht k mit beliebigem Multi-
plikatorsystem und

$$R[\Gamma] := \bigoplus_{k=0}^{\infty} [\Gamma, k], \quad R(\Gamma) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\Gamma, k), \quad R^{(m)}(\Gamma) := \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0(m)}}^{\infty} (\Gamma, k) \quad (m \in \mathbb{N})$$

die graduierten Ringe der Modulformen zu Γ mit beliebigem bzw. trivialem
Multiplikatorsystem sowie, im letzten Fall, einer Kongruenzbedingung an das
Gewicht. $R[\Gamma] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$ ($m \in \mathbb{N}$) bedeute, daß $R[\Gamma]$ von den Modulformen
 $f_1, \dots, f_m$ als Ring über $\mathbb{C}$ erzeugt wird, d.h. jede Modulform aus $R[\Gamma]$ ist
darstellbar als isobares Polynom in den Funktionen $f_1, \dots, f_m$, die allerdings
noch nichttrivialen algebraischen Relationen untereinander genügen können.
Sind sie algebraisch unabhängig, so ist $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$ ein Polynomring.

Beschreibt $*$: $H_1^2 \rightarrow H_1^2$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto \zeta^* := (\zeta_2, \zeta_1)$ die Vertauschung der
Variablen in H_1^2 , so heißt eine Modulform f zu Γ_K symmetrisch bzw. schief-
symmetrisch, wenn

$$f(\zeta) = f(\zeta^*) \quad \text{bzw.} \quad f(\zeta) = -f(\zeta^*)$$

für alle $\zeta \in H_1^2$ gilt. Der von den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen
Modulformen aus (Γ_K, k, v) gebildete Unterraum werde mit $(\Gamma_K, k, v)^+$ bzw.
 $(\Gamma_K, k, v)^-$ bezeichnet. Entsprechend bezeichne $R(\Gamma_K)^+, R^{(m)}(\Gamma_K)^+$ die Unter-
ringe der symmetrischen Modulformen von $R(\Gamma_K), R^{(m)}(\Gamma_K)$.

Beachtet man, daß der Ring der ganzen Zahlen von K die Darstellung

$$\mathcal{O} = \left\{ \mu = \frac{m + n\sqrt{D}}{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \equiv nD \pmod{2} \right\}$$

besitzt, so kann man für die in der Fourierentwicklung (8) einer Hilbertschen
Modulform f auftretenden $v \in \mathfrak{d}^{-1}$ folgende für das Rechnen mit Fourierkoeff-
fizienten sehr bequeme Darstellung einführen:

$$v = \frac{\mu}{\sqrt{D}} =: [m, n] \iff \mu = \frac{m + n\sqrt{D}}{2}, \quad m \equiv nD \pmod{2} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Offensichtlich gilt

$$[m_1, n_1] + [m_2, n_2] = [m_1 + m_2, n_1 + n_2], \quad [m, n]' = [-m, n],$$

$$\text{Sp}([m, n]) = n, \quad [m, n] \succeq 0 \iff |m| \leq n\sqrt{D}$$

und die Fourierentwicklung (8) von $f \in (\Gamma_K, k, v)$ lautet dann in diesem Formalismus:

$$(9) \quad f(\zeta) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ m \equiv nD(2) \\ |m| \leq n\sqrt{D}}} a(f, [m, n]) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \text{Sp}([m, n]\zeta)\right) \quad (\zeta \in H_1^2).$$

Die Modulform f heiße *normiert*, wenn ihr erster nichtverschwindender Fourierkoeffizient auf 1 normiert ist, wobei die $a(f, [m, n])$ gemäß wachsender Werte von n und fallender Werte von m unter der Nebenbedingung $|m| \leq n\sqrt{D}$ angeordnet seien. Offensichtlich gilt (beachte $[m, n]' = [-m, n]$):

$$(10) \quad \begin{aligned} & f \text{ ist symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch} \\ \iff & a(f, [m, n]) = a(f, [-m, n]) \text{ bzw. } a(f, [m, n]) = -a(f, [-m, n]) \\ & \text{für alle } (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \equiv nD(2), |m| \leq n\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Aus

$$f(U^{-1}\langle \zeta \rangle) = v(U)^{-1} \text{Nm}(\varepsilon)^k f(\zeta) \quad \text{für} \quad U := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

folgt

$$(11) \quad a(f, [m, n]\varepsilon^2) = v(U)^{-1} \text{Nm}(\varepsilon)^k a(f, [m, n])$$

und aus

$$f(T_\mu \langle \zeta \rangle) = v(T_\mu) f(\zeta) \quad \text{für} \quad T_\mu := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathcal{O}) \quad (\text{speziell: } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

folgt

$$(12) \quad a(f, [m, n]) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \text{Sp}([m, n]\mu)\right) = v(T_\mu) a(f, [m, n])$$

für alle $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m \equiv nD(2)$, $|m| \leq n\sqrt{D}$, $\mu \in \mathcal{O}$.

Sei ω_1, ω_2 eine Ganzheitsbasis von K . Dann wird die Hilbertsche Modulgruppe Γ_K erzeugt von $I = I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, T_{ω_1} , T_{ω_2} : $\Gamma_K = \langle I, T_{\omega_1}, T_{\omega_2} \rangle$ (vgl. Vaserten [43], Theorem, S. 321; Nachweis der Richtigkeit dieses Theorems für den hier zitierten Fall: siehe Leutbecher [31], S. 276 ff.). Ist $\mathcal{O}$ euklidisch - dies ist genau für 16 reellquadratische Zahlkörper, darunter $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$, der Fall, vergleiche etwa

Weiss [44], S. 242 -, so folgt dies bereits aus dem Beweis von Satz 1 bei Götzky [7], S. 414, wo man $\Gamma_K = \langle I, T, T_\omega, U \rangle$ erhält, wenn $1, \omega$ eine Ganzheitsbasis von K ist. Wegen $U = I T_{\varepsilon^{-1}} I T_{\varepsilon} I T_{\varepsilon^{-1}}$ ist U dabei als Erzeugende überflüssig. Speziell für die Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$, die beide Grundeinheiten der Norm -1 haben, nämlich $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bzw. $\varepsilon = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$, ergibt sich, da ε jeweils die Form $\frac{u+\sqrt{D}}{2}$ mit $u \equiv D(2)$ hat, also $1, \varepsilon$ beidesmal eine Ganzheitsbasis ist:

$$\Gamma_K = \langle I, T, T_{\varepsilon} \rangle \quad \text{für } K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{8}).$$

Die Charaktere von $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}$ wurden für $D = 5$ von Maaß [33], Satz 1, S. 72 und für $D = 8$ von Gundlach [13], S. 110, 111 wie folgt bestimmt¹:

LEMMA 1. (a) $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ besitzt nur den trivialen Charakter $v \equiv 1$.

(b) $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}$ besitzt genau 4 verschiedene Charaktere. Sie sind charakterisiert durch

$$\begin{aligned} v_1(T) &= +1, & v_2(T) &= -1, & v_3(T) &= -1, & v_4(T) &= +1 \\ v_1(T_{\varepsilon}) &= +1, & v_2(T_{\varepsilon}) &= +1, & v_3(T_{\varepsilon}) &= -1, & v_4(T_{\varepsilon}) &= -1 \end{aligned}$$

und es gilt $v_i(I) = v_i(T)$ sowie $v_i(U) = v_i(T)v_i(T_{\varepsilon})$ für $i=1, \dots, 4$.

Da später viel mit Anfangsfourierkoeffizienten von Modulformen zu $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}$ für $D = 5, 8$ gerechnet wird, erweist es sich wegen der Summationsbedingung in (9) als nützlich, folgende Angaben vor Augen zu haben:

Für $m_n := \max \{ m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq n\sqrt{D}, m \equiv nD(2) \}$ hat man die Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	6
$D = 5: m_n$	0	1	4	5	8	11	12
$D = 8: m_n$	0	2	4	8	10	14	16

Definiert man im Hinblick auf (11)

$$[m, n] \sim [m_0, n_0] \quad :\Leftrightarrow \quad [m, n]\varepsilon^2 = [m_0, n_0] \text{ oder } [m, n] = [m_0, n_0]\varepsilon^2,$$

so impliziert die Relation $\sim$ (keine Äquivalenzrelation, nur symmetrisch) für $f \in (\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}, k)$ den Faktor $(-1)^k$ und für $f \in (\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}, k, v_i)$ den Faktor $(-1)^k v_i(U)$ zwischen den entsprechenden Fourierkoeffizienten. In der folgenden

¹ In [35], S. 29, 30 ist dies in leicht allgemeinerer vereinfachter Form simultan für beide Fälle durchgeführt.

Tabelle werden für jedes $n \leq 6$ diejenigen $[m, n]$ aufgelistet, für welche $[m, n] \sim [m_0, n_0]$ mit einem $n_0 \leq n$ gilt, wobei wegen $[m, n] \sim [m_0, n_0] \Leftrightarrow [-m, n] \sim [-m_0, n_0]$ nur $[m, n]$ mit $m \geq 0$ berücksichtigt sind.

(13)

	D = 5	D = 8
n	$[m, n], m \equiv n(2)$	$[m, n], m \equiv 0(2)$
2	$[4, 2] \sim [1, 1]$	
3	$[5, 3] \sim [0, 2]$	$[8, 3] \sim [0, 1]$
4	$[8, 4] \sim [2, 2]$ $[6, 4] \sim [-1, 3]$	$[10, 4] \sim [-2, 2]$
5	$[11, 5] \sim [4, 2]$ $[9, 5] \sim [1, 3]$ $[7, 5] \sim [-2, 4]$	$[14, 5] \sim [2, 1]$ $[12, 5] \sim [-4, 3]$
6	$[12, 6] \sim [3, 3]$ $[10, 6] \sim [0, 4]$ $[8, 6] \sim [-3, 5]$	$[16, 6] \sim [0, 2]$ $[14, 6] \sim [-6, 4]$
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$:	$[n, n] \sim [-n, n]$	$[2n, n] \sim [-2n, n]$

Für das Verschwinden von Fourierkoeffizienten einer Modulform zu Γ_K , $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$, folgt unter Beachtung von Lemma 1 aus (10) und der letzten Zeile von Tabelle (13) sowie aus (12):

LEMMA 2. (a) Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ gilt: Ist $f \in (\Gamma_K, k)^+$ mit $k \equiv 1(2)$, so ist $a(f, [\pm n, n]) = 0$ bzw. $a(f, [\pm 2n, n]) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ gilt: Ist $f \in (\Gamma_K, k, v_i)$, so ist $a(f, [m, n]) = 0$ für

$$\begin{cases} i = 2, & \text{wenn } n \equiv 0(2) \text{ oder } m \equiv 0(4) \\ i = 3, & \text{wenn } n \equiv 0(2) \text{ oder } m \equiv 2(4) \\ i = 4, & \text{wenn } n \equiv 1(2) \text{ oder } m \equiv 0(4). \end{cases}$$

Insbesondere ist also $(\Gamma_K, k, v_i) = (\Gamma_K, k, v_i)_0$ für $i = 2, 3, 4$.

Spezielle Modulformen mit gut berechenbaren Fourierkoeffizienten sind die Eisensteinreihen. Für einen beliebigen reellquadratischen Zahlkörper K und für gerades $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$, ist die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k zu Γ_K (mit Teilerfremdheitsbedingung und zum Ideal $\mathcal{O}$)

$$g_k(\zeta) := \sum_{\substack{(\mu, v) : \mathcal{O} \times \mathcal{O} / \mathcal{O} \times \\ (\mu, v) = (1)}} \text{Nm}(\mu\zeta + v)^{-k} \quad (\zeta \in H_1^2),$$

wohldefiniert und absolut kompakt konvergent in H_1^2 ; die Summationsbedingung bedeute, daß über ein vollständiges Repräsentantensystem von (modulo beliebiger Einheiten) nichtassozierten Paaren teilerfremder Zahlen aus $\mathcal{O}$

summiert wird. Im Falle $k = 2$, wo obige Reihe nicht mehr absolut konvergiert, setzt man nach Hecke [18] für $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > 0$

$$g_2(\zeta) := \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{\substack{(\mu, \nu) : \theta \times \bar{\theta} / \theta^{\times} \\ (\mu, \nu) = (1)}} \text{Nm}(\mu\zeta + \nu)^{-2} |\text{Nm}(\mu\zeta + \nu)|^{-s}.$$

Die Eisensteinreihen g_k stellen dann für gerade $k \geq 2$ nichttriviale Modulformen aus $(\Gamma_K, k)^+$ dar, besitzen also eine Fourierentwicklung der Form (8), S. 8 mit $q = 1$. Die Fourierkoeffizienten haben die Gestalt (Hecke [18], S. 385 oder Siegel [42], S. 88):

$$\begin{aligned} a(g_k, 0) &= 1 \text{ und } a(g_k, \nu) = \kappa_k(\bar{\theta}) \cdot \sigma_{k-1}(\bar{\theta}, \nu) \quad (\nu \in \mathfrak{b}^{-1}, \nu \gg 0) \text{ mit} \\ \kappa_k(\bar{\theta}) &= \frac{(2\pi)^{2k} \cdot \sqrt{D}}{((k-1)!)^2 \cdot D^k \cdot \zeta_K(\bar{\theta}, k)}, \quad \zeta_K(\bar{\theta}, k) = \sum_{\substack{(\mu) \subset \bar{\theta} \\ \mu \neq 0}} |\text{Nm}(\mu)|^{-k} \text{ und} \\ \sigma_{k-1}(\bar{\theta}, \nu) &= \sum_{\substack{(\mu) \mid (\nu\sqrt{D}) \\ (\mu) \subset \bar{\theta}}} |\text{Nm}(\mu)|^{k-1}, \end{aligned}$$

wobei jeweils über die Hauptideale (μ) unter den angegebenen Bedingungen zu summieren ist. Die Werte der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(\bar{\theta}, k)$ des Zahlkörpers K zur Hauptklasse $\bar{\theta}$ an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, sind explizit berechenbar (vgl. etwa Siegel [42], Zagier [46]), ebenso die Teilersummen $\sigma_{k-1}(\bar{\theta}, \nu)$ und somit auch die Fourierkoeffizienten $a(g_k, \nu)$. Für die später benötigten Fälle $D = 5$, $k = 2, 6, 10$ und $D = 8$, $k = 2, 4, 6$ kann man die Konstanten $\kappa_k = \kappa_k(\bar{\theta})$ Gundlach [11], S. 239 ($D = 5$) und [13], S. 134, 135 ($D = 8$) entnehmen¹:

$D = 5$	$D = 8$
$\kappa_2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$\kappa_2 = 2^4 \cdot 3$
$\kappa_6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 67^{-1}$	$\kappa_4 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^{-1}$
$\kappa_{10} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 412751^{-1}$	$\kappa_6 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19^{-2}$

Die Teilersummen $\sigma_{k-1}(\bar{\theta}, \nu)$ berechnet man, indem man $(\nu\sqrt{D}) = ([m, n]\sqrt{D})$ in Primideale zerlegt, die, wenn $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ wie im Falle $D = 5, 8$ Klassenzahl 1 hat, selbst wieder Hauptideale sind, und das Zerlegungsgesetz für rationale Primzahlen beachtet. So erhält man folgende Werte für die $a(g_k, [m, n]) = \kappa_k \cdot \sigma_{k-1}(\bar{\theta}, [m, n])$:

¹ oder [35], S. 36 (Berechnung auf S. 95-97).

D = 5 :

(14)

$[m,n]$	$a(g_2,[m,n])$	$a(g_6,[m,n])$	$a(g_{10},[m,n])$
$[0,1]$	1	1	1
$[1,1]$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 67^{-1}$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 412751^{-1}$
$[2,2]$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 67^{-1}$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 109 \cdot 412751^{-1}$
$[0,2]$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 521 \cdot 67^{-1}$	$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5167 \cdot 412751^{-1}$
$[3,3]$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1181 \cdot 67^{-1}$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 530713 \cdot 412751^{-1}$
$[1,3]$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13421 \cdot 67^{-1}$	$2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 590077 \cdot 412751^{-1}$
$[4,4]$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 151 \cdot 331 \cdot 67^{-1}$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 87211 \cdot 262657 \cdot 412751^{-1}$

D = 8 :

(15)

$[m,n]$	$a(g_2,[m,n])$	$a(g_4,[m,n])$	$a(g_6,[m,n])$
$[0,0]$	1	1	1
$[2,1]$	$2^4 \cdot 3$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^{-1}$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19^{-2}$
$[0,1]$	$2^4 \cdot 3^2$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^{-1}$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^{-2}$
$[4,2]$	$2^4 \cdot 3 \cdot 7$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 73 \cdot 11^{-1}$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 151 \cdot 19^{-2}$
$[2,2]$	$2^7 \cdot 3$	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 11^{-1}$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 191 \cdot 19^{-2}$
$[0,2]$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 11^{-1}$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 19^{-2}$
$[6,3]$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 73 \cdot 11^{-1}$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1181 \cdot 19^{-2}$

Die kursiv gesetzten Werte wurden nur der Vollständigkeit halber aufgenommen; sie werden später nicht benötigt.

1.3. Modulare Einbettung, Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$

Dieser Abschnitt enthält im wesentlichen eine auf die Bedürfnisse der vorliegenden Arbeit zugeschnittene Zusammenstellung der Ergebnisse Hammonds [14] für reellquadratische Zahlkörper, speziell für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ ¹.

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit $D = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$, v gerade ($\Rightarrow u \equiv D(2)$) und $\omega := \frac{u + \sqrt{D}}{2}$. Setzt man für $\eta := \frac{\omega}{\sqrt{D}}$ und $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$, $\rho \in K$

¹ Man findet dies (mit vollständigen Beweisen) auch in [35], § 3 u. § 4.1, S. 45-80.

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \sqrt{\eta'} \\ \sqrt{\eta'} & -\sqrt{\eta} \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow A = A^{-1}) \quad \text{und} \quad \zeta^\times := \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad \rho^\times := \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho' \end{pmatrix},$$

so werden durch

$$\psi(\zeta) := A \zeta^\times A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} z_1 = \text{Sp}(\eta\zeta) = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \cdot \frac{u}{\sqrt{D}} \\ z_4 = \text{Sp}(\eta'\zeta) = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} - \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \cdot \frac{u}{\sqrt{D}} \\ z_2 = \text{Sp}\left(\frac{v\zeta}{2\sqrt{D}}\right) = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \cdot \frac{v}{\sqrt{D}} \end{cases}$$

und

$$(16) \quad \Psi(\mu) := \begin{pmatrix} A\alpha^\times A & A\beta^\times A \\ A\gamma^\times A & A\delta^\times A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\alpha) & \psi(\beta) \\ \psi(\gamma) & \psi(\delta) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_K$$

eine holomorphe Injektion $\psi = \psi_{u,v}: H_1^2 \rightarrow H_2$ und ein Monomorphismus

$\Psi = \Psi_{u,v}: \Gamma_K \rightarrow \Gamma_2$ mit der Eigenschaft

$$(17) \quad \Psi(\mu) \langle \psi(\zeta) \rangle = \psi(\mu \langle \zeta \rangle), \quad j(\Psi(\mu), \psi(\zeta)) = j(\mu, \zeta) \quad \text{für alle} \quad \mu \in \Gamma_K, \quad \zeta \in H_1^2$$

definiert, wie man sofort verifiziert. $(\psi, \Psi): (H_1^2, \Gamma_K) \rightarrow (H_2, \Gamma_2)$ wird (nach Hammond [14]) als *modulare Einbettung* bezeichnet. Ihre wesentlichsten Eigenschaften sind in folgendem Lemma zusammengefaßt:

LEMMA 3. (a) Für jede Siegelsche Modulform $f \in (\Gamma_2, k, v)$ ($v = 1, v_0$) ist die Restriktion $f|_\psi(H_1^2) = f\psi$ eine Hilbertsche Modulform aus $(\Gamma_K, k, \hat{\Phi})$ mit $\hat{\Phi}(\mu) := v(\Psi(\mu))$ für $\mu \in \Gamma_K$. Dies induziert den Vektorraum- bzw. Ringhomomorphismus $\hat{\psi}: (\Gamma_2, k, v) \rightarrow (\Gamma_K, k, \hat{\Phi}), R[\Gamma_2] \rightarrow R[\Gamma_K], f \mapsto f\psi$. Ist $f \in (\Gamma_2, k)$, so ist $f\psi$ sogar eine symmetrische Modulform aus $(\Gamma_K, k)^+$ wegen

$$V_I \langle \psi(\zeta) \rangle = \psi(\zeta^*) \quad \text{und} \quad j(V_I, \psi(\zeta)) = 1 \quad \text{für} \quad V_I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \quad (\zeta \in H_1^2).$$

(b) Hat $f \in (\Gamma_2, k, v)$ die Fourierentwicklung

$$f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(f, T) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \sigma(TZ)\right) \quad (T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_4 \end{pmatrix} \text{ halbganz, } q = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 1 \\ 2 & \text{für } v = v_0 \end{cases}),$$

so lautet die Fourierentwicklung von $f\psi \in (\Gamma_K, k, \hat{\Phi})$:

$$f\psi(\zeta) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ m \equiv nD(2) \\ |m| \leq n\sqrt{D}}} a(f\psi, [m,n]) \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \text{Sp}([m,n]\zeta)\right) \quad \text{mit}$$

$$(18) \quad a(f\psi, [m,n]) = \sum_{\substack{T \geq 0 \\ \sigma(T) = r \cdot n \\ (t_1 - t_4)u + 2t_2v = r \cdot m}} a(f, T), \quad \text{wobei}$$

$$\hat{q} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \hat{v} = 1 \\ 2, & \text{falls } \hat{v} \neq 1 \end{cases} \text{ und } r = \frac{q}{\hat{q}} = \begin{cases} 2, & \text{falls } v = v_0, \hat{v} = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist.}$$

- (c) Hat K Klassenzahl 1 und ist f eine Spitzenform aus $(\Gamma_2, k, v)_0$, so ist $f\psi$ eine Spitzenform aus $(\Gamma_K, k, \hat{v})_0$.

Alle Aussagen des Lemmas sind klar bzw. leicht zu sehen. (c) gilt auch, wenn K nicht Klassenzahl 1 hat, sofern man die dann übliche Definition von "Spitzenform" zugrunde legt.

Wesentlich ist auch folgende Einbettungsabbildung:

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein beliebiger reellquadratischer Zahlkörper. Dann besitzt die durch

$$\pi: H_1 \rightarrow H_1^2, z \mapsto (z, z) \text{ und } \Pi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definierte Einbettung $(\pi, \Pi): (H_1, \Gamma_1) \rightarrow (H_1^2, \Gamma_K)$ längs der Diagonalen

$$\mathcal{D} = \{z \in H_1^2 \mid z = z^*\} = \pi(H_1)$$

offenbar die Eigenschaft

$$\Pi(m) \langle \pi(z) \rangle = \pi(m \langle z \rangle), j(\Pi(m), \pi(z)) = j(m, z)^2 \text{ für alle } m \in \Gamma_1, z \in H_1,$$

und man erhält als Lemma, dessen Aussagen sich alle unmittelbar verifizieren lassen:

LEMMA 4. (a) Für jede Hilbertsche Modulform $f \in (\Gamma_K, k, v)$ ist die Restriktion

$f|_{\mathcal{D}} = f\pi$ eine elliptische Modulform aus $(\Gamma_1, 2k, \hat{v})$ mit $\hat{v}(m) := v(\Pi(m))$ für $m \in \Gamma_1$. Dies induziert den Vektorraum- bzw. Ringhomomorphismus

$$\hat{\pi}: (\Gamma_K, k, v) \rightarrow (\Gamma_1, 2k, \hat{v}), R[\Gamma_K] \rightarrow R^{(2)}[\Gamma_1], f \mapsto f\pi.$$

- (b) Hat $f \in (\Gamma_K, k, v)$ die Fourierentwicklung (9), S. 10, so lautet die Fourierentwicklung von $f\pi \in (\Gamma_1, 2k, \hat{v})$:

$$f\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(f\pi, n) \exp\left(\frac{2\pi i}{\hat{q}} nz\right), \quad a(f\pi, n) = \sum_{\substack{m \equiv rnD(2) \\ |m| \leq rn\sqrt{D}}} a(f, [m, rn])$$

mit $r = \frac{q}{\hat{q}}$ und $\hat{q} \in \mathbb{N}$ minimal mit $\hat{v}^{\hat{q}} = 1$ ($\Rightarrow \hat{q} | q$, also $r \in \mathbb{N}$).

Speziell gilt

für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$: Da $v \equiv 1$, also $\hat{v} = 1 \Rightarrow q = \hat{q} = 1, r = 1$.

für $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$: $\hat{v}_1 = 1 \Rightarrow q = \hat{q} = 1, r = 1, \hat{v}_2 = \hat{v}_3 = v_0 \Rightarrow q = \hat{q} = 2, r = 1,$
 $\hat{v}_4 = 1 \Rightarrow q = 2, \hat{q} = 1, r = 2$ (v_0 das nichttriviale reelle
Multiplikatorsystem von Γ_1 , charakterisiert durch
 $v_0(T) = v_0(I) = -1$).

- (c) Ist f eine Spitzenform aus $(\Gamma_K, k, v)_0$, so ist $f\pi$ eine Spitzenform
aus $(\Gamma_1, 2k, \hat{v})_0$.

Aus der Theorie der elliptischen Modulformen ist wohlbekannt (vgl.
etwa Serre [40] oder Rankin [36]):

LEMMA 5. Bezeichnet $e_k \in (\Gamma_1, k)$ die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k
($a(e_k, 0) = 1$) und die Diskriminante $\Delta := 1728^{-1}(e_4^3 - e_6^2)$ die normierte
Spitzenform vom Gewicht 12 ($a(\Delta, 1) = 1$) zur elliptischen Modulgruppe Γ_1 ,
so sind $R(\Gamma_1)$ und $R^{(4)}(\Gamma_1)$ Polynomringe der Gestalt

$$R(\Gamma_1) = \mathbb{C}[e_4, e_6] \quad \text{und} \quad R^{(4)}(\Gamma_1) = \mathbb{C}[e_4, \Delta].$$

Δ hat nur eine einfache Nullstelle in der Spitze ∞ und keine Null-
stellen in H_1 .

Die Kernaussage des nächsten Lemmas geht auf Gundlach [11], S. 240, 241
zurück; vgl. auch Hammond [14], S. 507¹.

LEMMA 6. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein beliebiger reellquadratischer Zahlkörper und
 $\hat{\pi}: R^{(2)}(\Gamma_K)^+ \rightarrow R^{(4)}(\Gamma_1) = \mathbb{C}[e_4, \Delta]$ surjektiv, d.h. es gebe Modul-
formen h_2, h_6 aus $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ der Gewichte 2 und 6 mit $h_2\pi = e_4$ und
 $h_6\pi = \Delta$. Wenn dann h_r eine weitere Modulform aus $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ vom geraden
Gewicht r ist, die Kern $\hat{\pi}$, das Ideal der auf $\mathcal{D}$ identisch verschwin-
denden Modulformen aus $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$, als Hauptideal erzeugt, so sind
 h_2, h_6, h_r algebraisch unabhängig und es gilt

$$R^{(2)}(\Gamma_K)^+ / \langle h_r \rangle \simeq R^{(4)}(\Gamma_1) \quad \text{und} \quad R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[h_2, h_6, h_r].$$

Jede Modulform aus $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ ist daher eindeutig als isobares Polynom
in h_2, h_6, h_r darstellbar.

¹ oder [35], S. 60.

Dieses Lemma bildet den Schlüssel zur Gewinnung der Struktursätze für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$ (vgl. Gundlach [11], S. 239-241) und $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ (vgl. Hammond [14]). Eine Fourierkoeffizientenbetrachtung unter Verwendung von (14), S. 14 und Lemma 4(b) ergibt

$$(19) \quad \begin{aligned} g_2 \pi &= e_4 && \text{für } D \text{ beliebig} \\ (g_2^3 - g_6) \pi &= 43200 \cdot 67^{-1} \Delta && \text{für } D = 5. \end{aligned}$$

Da für $D = 5$ somit $h_2 := g_2$ und $h_6 := 67 \cdot 43200^{-1} (g_2^3 - g_6)$ die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllen, d.h. $\hat{\pi}$ surjektiv ist¹, muß man nur noch eine das Ideal Kern $\hat{\pi}$ erzeugende Modulform h_r finden, sofern eine solche überhaupt existiert. Hammond [14] zeigte nun unter Verwendung der modularen Einbettung $(\psi, \Psi): (H_1^2, \Gamma_K) \rightarrow (H_2, \Gamma_2)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$, daß $\Theta\psi$, die Restriktion des in (6), S. 7 definierten Produkts der 10 Theta-reihen zweiten Grades auf $\psi(H_1^2)$, eine nichttriviale schiefsymmetrische, also auf der Diagonalen $\mathcal{D}$ identisch verschwindende Spitzenform vom Gewicht 5 zu Γ_K mit evtl. nichttrivialem Multiplikatorsystem ist, deren Nullstellen alle die Ordnung 1 haben, da Θ nur Nullstellen der Ordnung 1 hat. Ihr genaues Nullstellengebilde $\pi_{\Theta\psi}$ lautet (vgl. [14], S.508ff., 512, 514^{2,3})

$$\text{für } D = 5: \quad \pi_{\Theta\psi} = \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu \langle \mathcal{D} \rangle$$

$$\text{für } D = 8: \quad \pi_{\Theta\psi} = \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu \langle \mathcal{D} \rangle \cup \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu \langle \mathcal{C} \rangle \quad \text{mit der zu } \mathcal{D} \text{ } \Gamma_K\text{-inäquiva-}$$

$$\text{lenten Kurve } \mathcal{C} := \{(\zeta_1, \zeta_2) \in H_1^2 \mid \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon' \zeta_2 = 0\} \quad (\varepsilon = 1 + \sqrt{2}).$$

¹ Man kann leicht zeigen, daß $\hat{\pi}$ für alle D der Form $D = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$ surjektiv ist, vgl. Hammond [14], S. 507 oder [35], S. 60.

² oder siehe [35], Satz 4.12., S. 77, 78.

³ Mit $\psi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ wie in (7), S. 7) liegen wegen $\Psi(\Gamma_K) \subset \Gamma_2$ auch alle dazu $\Psi(\Gamma_K)$ -äquivalenten Kurven $\psi(\mu \langle \mathcal{D} \rangle)$ ($\mu \in \Gamma_K$) in $\pi_{\Theta} = \bigcup_{M \in \Gamma_2} M \langle \mathcal{N} \rangle$, aber

π_{Θ} schneidet $\psi(H_1^2)$, wie Hammonds Untersuchungen zeigen, mit Ausnahme des Falles $D = 5$ stets noch an weiteren zu $\psi(\mathcal{D})$ $\Psi(\Gamma_K)$ -inäquivalenten Stellen. Hecke behauptet dagegen in seiner Dissertation [16], S. 33 fälschlich, die Nullstellen von $\Theta\psi$ seien alle zu $\mathcal{D}$ Γ_K -äquivalent, womit ihm der entscheidende Fehler unterläuft, der zu dem Fehlschluß des vermeintlichen Existenznachweises einer - bekanntlich nicht existierenden - nichtkonstanten holomorphen Hilbertschen Modulfunktion in seiner Habilitationsschrift [17], S. 72 führt. (Hecke arbeitet zwar mit einer etwas anderen modularen Einbettung als der hier definierten, was aber in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt.) Hierauf soll in einer weiteren Arbeit noch ausführlicher eingegangen werden. (Herr Gundlach hat diesen Fehler Heckes etwa gleichzeitig ebenfalls bemerkt.)

Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ folgt hieraus sofort, daß $\theta^2\psi \in (\Gamma_K, 10)^+$ jede symmetrische auf $\mathcal{D}$ identisch verschwindende Modulform f zu Γ_K teilt (beachte: $\frac{f}{\theta\psi}$ ist schiefssymmetrisch, also nochmals durch $\theta\psi$ teilbar), also das Ideal $\text{Kern } \hat{\pi}$ erzeugt und daher als die gesuchte Funktion h_r fungieren kann. Mit den normierten Spitzenformen der Gewichte 6 und 10

$$(20) \quad s_6 := 67 \cdot 21600^{-1} (g_2^3 - g_6) \quad (\Rightarrow a(s_6, [0,0]) = 0, a(s_6, [1,1]) = 1, s_6\pi = 2\Delta)$$

$$(21) \quad s_{10} := 2^{-12} \theta^2\psi \quad (\Rightarrow a(s_{10}, [0,0]) = a(s_{10}, [1,1]) = 0, a(s_{10}, [2,2]) = 1, \\ a(s_{10}, [0,2]) = -2),$$

wobei die s_{10} betreffenden Angaben unter Verwendung der Beziehung $\theta^2 = -2^{14} \chi_{10}$ (Igusa [28], S. 848) und der Fourierkoeffizienten $a(\chi_{10}, T)$ aus Tabelle (46), S. 39 mittels Lemma 3, S. 15 durch Fourierkoeffizientenvergleich ermittelt wurden, lautet dann der Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$ (Gundlach [11], Hammond [14]):

SATZ 1. Der graduierte Ring der symmetrischen Hilbertschen Modulformen geraden Gewichts zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist ein Polynomring der Gestalt

$$R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+ = \mathbb{C}[g_2, s_6, s_{10}].$$

Die Spitzenformen s_6 und s_{10} können auch durch die Eisensteinreihen g_6 und g_{10} ersetzt werden: Fourierkoeffizientenvergleich anhand von (14), S. 14 und (21) ergibt

$$(22) \quad s_{10} = (2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7)^{-1} \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4231 g_2^5 - 5 \cdot 67 \cdot 2293 g_2^2 g_6 + 412751 g_{10}),$$

woraus zusammen mit (20) $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+ = \mathbb{C}[g_2, s_6, s_{10}] = \mathbb{C}[g_2, g_6, g_{10}]$ folgt.

Für $D = 8$, wo man als Fourierkoeffizienten von $2^{-12} \theta^2\psi$ unter Verwendung von (46), S. 39 und Lemma 3, S. 15

$$(23) \quad a(2^{-12} \theta^2\psi, [m,n]) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2, m = \pm 2 \\ -2 & \text{für } n = 2, m = 0 \\ 0 & \text{für } n \leq 2, m \text{ sonst} \end{cases}$$

erhält, wird sich $\hat{\pi}$ ebenfalls als surjektiv erweisen und ein Teilprodukt von $\theta^2\psi$ die Rolle von h_r übernehmen (vgl. Hammond [14], S. 512 ff.) Genauereres dazu im nächsten Paragraphen.

§ 2 KONSTRUKTION HILBERTSCHER MODULFORMEN ZU $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ UND $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ MITTELS THETAREIHEN

2.1. Vorbereitungen, Thetareihen zu reellquadratischen Zahlkörpern

Um die beiden folgenden Paragraphen nicht mit zu vielen technischen Details zu belasten, werden in diesem Paragraphen gewisse nichttriviale Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ konstruiert, deren Existenz später benötigt wird, so unter anderem das Teilprodukt von $\theta^2\psi$, das im Falle $D = 8$ die Rolle von h_r aus Lemma 6 übernimmt. Die Konstruktion dieser Funktionen erfolgt durch Bilden sich gegenüber Moduls substitutionen "symmetrisch" verhaltender Polynome geeigneter Potenzen der 10 Thetareihen zweiten Grades (vgl. (5), S.7) unter der modularen Einbettung ψ . Die Reihen ϑ_i unter der modularen Einbettung ψ seien dabei mit

$$\theta_i(\zeta) := \vartheta_i(\psi(\zeta)) = \vartheta(\psi(\zeta); a, b) \quad (\zeta \in H_1^2, i = 0, 1, \dots, 9)$$

bezeichnet, wobei i die Nummer der Charakteristik (a, b) in (5) ist. Ein Polynom $p(\theta_0, \dots, \theta_9)$ heiße Γ_K -symmetrisch (vom Gewicht k mit Multiplikator-system v), wenn

$$p(\theta_0, \dots, \theta_9)(\mu\zeta) = v(\mu)j(\mu, \zeta)^k p(\theta_0, \dots, \theta_9)(\zeta) \quad \text{für alle } \zeta \in H_1^2, \mu \in \Gamma_K$$

gilt. Zum Nachweis der Nichttrivialität der als Γ_K -symmetrische Polynome in den θ_i konstruierten Hilbertschen Modulformen wird entscheidend von der Tatsache, daß die Thetareihen zweiten Grades bei Restriktion auf die Diagonalebene $\mathcal{N}$ in das Produkt zweier elliptischer Thetareihen übergehen (vgl. (3), S.7):

$$(24) \quad \vartheta\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = \vartheta_{a_1 b_1}(z_1) \cdot \vartheta_{a_2 b_2}(z_4),$$

und sich hieraus ergebender Konsequenzen Gebrauch gemacht, wobei die im folgenden Lemma zusammengestellten klassischen Identitäten und Eigenschaften der elliptischen Thetareihen $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ (vgl. (4), S.7) wesentlich verwendet werden.

LEMMA 7 (Rankin [36], chap.7.1., S.215-226, Igusa [27], S.244).

- (a) $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ haben keine Nullstellen in H_1 ; ihre Werte in der Spitze $i\infty$ lauten: $\vartheta_2(i\infty) = 0, \vartheta_3(i\infty) = \vartheta_4(i\infty) = 1$.
- (b) $\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_4^4$
- (c)
$$e_4 = \frac{1}{2}(\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8) = \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 - \vartheta_2^4 \vartheta_4^4$$

$$e_6 = \frac{1}{2}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4)(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) = \frac{1}{2}(\vartheta_3^8 \vartheta_4^4 - \vartheta_3^8 \vartheta_2^4 + \vartheta_4^8 \vartheta_3^4 + \vartheta_4^8 \vartheta_2^4 - \vartheta_2^8 \vartheta_3^4 - \vartheta_2^8 \vartheta_4^4)$$

$$\Delta = 2^{-8}(\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4)^8$$

$$\sqrt{\Delta} = 2^{-4}(\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4)^4 = 2^{-4} \cdot 3^{-1}(\vartheta_3^{12} - \vartheta_2^{12} - \vartheta_4^{12})$$
- (d)
$$2\vartheta_2(2z)\vartheta_3(2z) = \vartheta_2^2(z)$$

$$\vartheta_3(z)\vartheta_4(z) = \vartheta_4^2(2z) \quad (z \in H_1)$$
- (e) $(\Gamma_1, k, v_0) = (\Gamma_1, k, v_0)_0 = \sqrt{\Delta}(\Gamma_1, k-6)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ([36], chap.6.4., S. 206-208).

Erstes Ziel ist nun das Erstellen einer Tabelle, die das Transformationsverhalten der θ_i gegenüber den Erzeugenden von $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}$ und der Variablenvertauschung $\zeta \rightarrow \zeta^*$ und das Verhalten der θ_i in der Spitze $i\infty$ sowie bei Restriktion auf die Diagonale $\mathcal{D}$ und (für $D = 8$) auf die Kurve $\mathcal{C}$ beschreibt. Es wird dabei nicht nur $D = 5, 8$, sondern allgemeiner $D = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$, v gerade, also jedes D , für das eine modulare Einbettung $(\psi, \Psi) = (\psi_{u,v}, \Psi_{u,v})$ definiert wurde, zugelassen. 1, $\omega = \frac{u + \sqrt{D}}{2}$ ist dann eine Ganzheitsbasis von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, also $\Gamma_K = \langle T, T_\omega, I \rangle$, und nach (16), S.15 gilt

$$\Psi(T) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \Psi(T_\omega) = \begin{pmatrix} E & u & v/2 \\ v/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad \Psi(I_1) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = I_2,$$

so daß man für die einzelnen Thetareihen $\vartheta(\psi(\zeta); a, b)$ ($\zeta \in H_1^2$, $a, b \in \mathbb{Z}^2$) wegen (17), S.15 mittels (1), (2), S.6 folgende Transformationsformeln erhält:

$$(25) \quad \begin{aligned} \vartheta(\psi(T\langle \zeta \rangle); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) &= e^{\frac{\pi i}{4}(a_1^2 + a_2^2)} \vartheta(\psi(\zeta); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + 1 \\ a_2 + b_2 + 1 \end{pmatrix}) \\ \vartheta(\psi(T_\omega \langle \zeta \rangle); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) &= e^{\frac{\pi i}{4}(ua_1^2 + va_1 a_2)} \vartheta(\psi(\zeta); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 + ua_1 + (v/2)a_2 + u \\ b_2 + (v/2)a_1 \end{pmatrix}) \\ \vartheta(\psi(I\langle \zeta \rangle); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) &= e^{\frac{\pi i}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + 1)} \text{Nm}(-\zeta)^{1/2} \vartheta(\psi(\zeta); \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) \\ \vartheta(\psi(\zeta^*); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) &= e^{\pi i a_2 b_2} \vartheta(\psi(\zeta); \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}) \quad (\psi(\zeta^*) = V_I^{-1} \psi(\zeta)) \\ &\quad \text{mit } V_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}!, \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Formel für rein imaginäres ζ die Wurzel positiv zu ziehen ist. Für die diskriminantenabhängige Transformation T_ω gibt es genau 3 Fälle zu unterscheiden (beachte: $D = u^2 + v^2$, $(u, v/2) = 1$):

$$D \equiv 0(8) \Leftrightarrow u \equiv 0(2), v/2 \equiv 1(2)$$

$$D \equiv 1(8) \Leftrightarrow u \equiv 1(2), v/2 \equiv 0(2)$$

$$D \equiv 5(8) \Leftrightarrow u \equiv 1(2), v/2 \equiv 1(2).$$

Der Fall $D \equiv 4(8)$ kann wegen $D = u^2 + v^2$ und $D/4 \not\equiv 1(4)$ nicht auftreten.

Restringsiert auf die Diagonale $\mathcal{D}$ ist jedes θ_i wegen $\psi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{N}$ nach (24) Produkt zweier elliptischer Thetareihen:

$$\theta_i(\zeta) = \mathcal{D}_i \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_k(z) \mathfrak{g}_1(z) \quad \text{für } \zeta = (z, z) \in \mathcal{D}, z \in H_1; k, l \in \{2, 3, 4\} \text{ geeignet.}$$

Restringsiert auf die Kurve $\mathcal{C}$, die für $D = 8$ die Klasse der zu $\mathcal{D}$ Γ_K -inäquivalenten Nullstellenkurven von $\theta\psi$ repräsentiert, ist jedes θ_i ebenfalls Produkt zweier elliptischer Thetareihen: als Nullstellenkurve von θ ist $\psi(\mathcal{C})$ nach (7), S.7 zu $\mathcal{N}$ Γ_2 -äquivalent, d.h. es gibt ein $M \in \Gamma_2$ mit $M\langle\psi(\mathcal{C})\rangle \subset \mathcal{N}^1$ (daß man dabei mit *einem* $M \in \Gamma_2$ simultan für die ganze Kurve $\psi(\mathcal{C})$ auskommt, liegt in der Natur der Kurve $\mathcal{C}$, d.h. an der ursprünglichen Definition von $\mathcal{C}$ bei Hammond [14]). Für $\zeta = (-\epsilon'\sqrt{2}z, \epsilon\sqrt{2}z) \in \mathcal{C} =$

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) \in H_1^2 \mid \epsilon\zeta_1 + \epsilon'\zeta_2 = 0\} = \{(-\epsilon'\sqrt{2}z, \epsilon\sqrt{2}z) \mid z \in H_1\} \text{ ist } \psi(\zeta) = z \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mit $M = V_U$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ folgt dann $M\langle\psi(\zeta)\rangle = V_U\langle z \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rangle = z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$, also

$$(26) \quad \mathfrak{g}(\psi(\zeta); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = \mathfrak{g}(V_U^{-1} \langle \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix} \rangle; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = \mathfrak{g}(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix})$$

(beachte (2)(i), S.6) und somit wegen (24), S.20 die Behauptung.

Mittels (24), (25), (26) erhält man unter Beachtung von (1), S.6 und (4), S.7 nunmehr folgende Tabelle, in deren Kopf unter jeder Reihe θ_i nochmals die zugehörige Charakteristik (vgl. (5), S.7) angegeben ist:

¹ Für $D = 17$ findet man diesen Gedanken auch bei Hermann [19], Kap.III, der sich im übrigen ebenfalls alle benötigten Modulformen durch Bilden Γ_K -symmetrischer Polynome in den 10 Thetareihen zweiten Grades unter der Hammondschen modularen Einbettung verschafft. Dieses Konstruktionsprinzip ist in Wahrheit schon sehr alt, es wurde in ähnlicher Form bereits von Bourget [1] verwendet. Hierauf soll in einer weiteren Arbeit noch näher eingegangen werden.

(27)

	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9
t_a	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,1)
t_b	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,1)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
T	θ_2	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_1}$	θ_0	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_3}$	$e^{\frac{\pi i}{4} \theta_9}$	$e^{\frac{\pi i}{4} \theta_7}$	θ_8	$e^{\frac{\pi i}{4} \theta_5}$	θ_6	$e^{\frac{\pi i}{4} \theta_4}$
$D \equiv 0(8): T_\omega$	θ_0	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_3$	θ_2	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_1$	θ_9	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_7}$	θ_6	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_5}$	θ_8	θ_4
$D \equiv 1(8): T_\omega$	θ_8	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_1$	θ_6	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_3$	θ_9	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_5}$	θ_2	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_7}$	θ_0	θ_4
$D \equiv 5(8): T_\omega$	θ_8	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_3$	θ_6	$e^{\frac{\pi i}{4}(u+v)} \theta_1$	θ_4	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_7}$	θ_2	$e^{\frac{\pi i u}{4} \theta_5}$	θ_0	θ_9
I	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_0}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_2}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_1}$	$e^{\frac{3\pi i}{2} \theta_3}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_6}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_8}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_4}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_9}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_5}$	$e^{\frac{\pi i}{2} \theta_7}$
$*$	θ_0	θ_1	θ_2	$-\theta_3$	θ_5	θ_4	θ_8	θ_9	θ_6	θ_7
$\mathcal{N}(\mathcal{D})$	$\vartheta_3 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_2 \cdot \vartheta_2$	$\vartheta_4 \cdot \vartheta_4$	0	$\vartheta_3 \cdot \vartheta_2$	$\vartheta_2 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_3 \cdot \vartheta_4$	$\vartheta_2 \cdot \vartheta_4$	$\vartheta_4 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_4 \cdot \vartheta_2$
$D = 8: \mathcal{C}$	$\vartheta_0 \mathcal{K} = \vartheta_3 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_4 \mathcal{K} = \vartheta_3 \cdot \vartheta_2$	$\vartheta_8 \mathcal{K} = \vartheta_4 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_9 \mathcal{K} = \vartheta_4 \cdot \vartheta_2$	$\vartheta_1 \mathcal{K} = \vartheta_2 \cdot \vartheta_2$	$\vartheta_5 \mathcal{K} = \vartheta_2 \cdot \vartheta_3$	$\vartheta_6 \mathcal{K} = \vartheta_3 \cdot \vartheta_4$	$\vartheta_7 \mathcal{K} = \vartheta_2 \cdot \vartheta_4$	$\vartheta_2 \mathcal{K} = \vartheta_4 \cdot \vartheta_4$	$-\vartheta_3 \mathcal{K} = 0$
$i\infty$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0

Die Tabelle ist wie folgt zu lesen, z.B. drittletzte Spalte (unter θ_7):

$T: \theta_7(T<\zeta>) = e^{\frac{\pi i}{4} j(T,\zeta)}^{1/2} \theta_5(\zeta); D \equiv 0(8): T_\omega: \theta_7(T_\omega<\zeta>) = e^{\frac{\pi i u}{4} j(T_\omega,\zeta)}^{1/2} \theta_5(\zeta); \dots;$

$I: \theta_7(I<\zeta>) = e^{\frac{\pi i}{2} j(I,\zeta)}^{1/2} \theta_9(\zeta); *: \theta_7(\zeta^*) = \theta_9(\zeta); \mathcal{N}(\mathcal{D}): \mathcal{D}_7 \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} = \vartheta_2(z_1) \cdot \vartheta_4(z_4)$

(Reihenfolge von $\vartheta_i \cdot \vartheta_j$ wesentlich!), also $\theta_7(\zeta) = \vartheta_2(z) \cdot \vartheta_4(z)$ für $\zeta =$

$(z, z) \in \mathcal{D}; \mathcal{C}: \theta_7(\zeta) = \mathcal{D}_7 \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix} = \vartheta_2(z) \cdot \vartheta_4(2z)$ für $\zeta = (-\epsilon' \sqrt{2} z, \epsilon \sqrt{2} z) \in \mathcal{C};$

$i\infty: \theta_7(i\infty) = 0$. Allgemein erhält man also die Formel

$$\theta_i(\mu<\zeta>) = e^{\frac{\pi i t}{4} j(\mu,\zeta)}^{1/2} \theta_j(\zeta), \text{ wobei } j = \mu^{-1} \langle i \rangle \text{ und } t = t(\mu; j; u, v)$$

für $\mu = T, T_\omega, I$ durch die Tabelle (27) bestimmt sind. Weiter ersieht man aus der Tabelle, in welche Transitivitätsgebiete die Menge der Charakteristiken unter der Operation von Γ_K zerfällt:

$$\begin{aligned} D &\equiv 0(8): \{0,1,2,3\}, \{4,5,6,7,8,9\} \\ (28) \quad D &\equiv 1(8): \{0,1,2,4,5,6,7,8,9\}, \{3\} \\ D &\equiv 5(8): \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{aligned}$$

und daß diese Transitivitätsgebiete gegenüber der Variablenvertauschung * invariant sind.

Wie konstruiert man nun allgemein ein Γ_K -symmetrisches Polynom in den θ_i vom Gewicht k mit Multiplikatorsystem v ? Man gehe versuchsweise aus von einem Monom

$$\theta_{i_1}^{a_1} \dots \theta_{i_r}^{a_r} \quad \text{mit} \quad \sum_{v=1}^r a_v = 2k \quad (a_v \in \mathbb{N}, i_v \in \{0,1,\dots,9\} \text{ paarweise verschieden, } r \leq 10)$$

und bilde

$$p(\theta_0, \dots, \theta_9) = \sum_{(j_1, \dots, j_r)} c_{j_1 \dots j_r} \theta_{j_1}^{a_1} \dots \theta_{j_r}^{a_r},$$

wobei über die Bahn von $(i_1, \dots, i_r)$ unter Γ_K , d.h. über die (endliche!) Menge $\{(j_1, \dots, j_r) \mid j_v = \mu^{-1} \langle i_v \rangle, \mu \in \Gamma_K\}$ bzw., falls die a_v nicht paarweise verschieden sind und man die gleiche Summe nicht mehrfach haben möchte, über eine geeignete Teilmenge davon zu summieren ist und wobei für die Wahl der Koeffizienten $c_{j_1 \dots j_r}$ folgendes gilt: Genau dann, wenn man die Koeffizienten $c_{j_1 \dots j_r}$ von der Form

$$(29) \quad c_{j_1 \dots j_r} := v(\mu)^{-1} e^{\frac{\pi i t}{4}} \quad \text{mit} \quad t = \sum_{v=1}^r a_v \cdot t(\mu; j_v; u, v) \quad (j_v = \mu^{-1} \langle i_v \rangle)$$

wählt und diese dann die Bedingung

$$c_{j_1 \dots j_r}^2 = 1, \text{ also } c_{j_1 \dots j_r} = \pm 1 \text{ für alle } (j_1, \dots, j_r)$$

erfüllen, ist das entstandene Polynom $p(\theta_0, \dots, \theta_9)$ nach Konstruktion Γ_K -symmetrisch vom Gewicht k mit Multiplikatorsystem v . Durch eine nahe-
liegende Zusatzforderung in (29) kann man erreichen, daß man auf diese Weise nur symmetrische bzw. nur schiefssymmetrische Modulformen erhält.

Ist $p(\theta_0, \dots, \theta_9)(i\infty) \neq 0$ (beachte die letzte Zeile von Tabelle (27)!), so ist p als Nichtspitzenform eine nichttriviale Modulform, sonst eine möglicherweise identisch verschwindende Spitzenform. Da $p(\theta_0, \dots, \theta_9)$ bei Restriktion auf die Diagonale $\mathcal{D}$ oder die Kurve $\mathcal{C}$ gemäß Tabelle (27) jeweils in ein isobares Polynom in $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ übergeht, ist es zum Nachweis der Nichttrivialität von $p(\theta_0, \dots, \theta_9)$ hinreichend, zu zeigen, daß zumindest eines

der Polynome in den elliptischen Thetareihen nicht identisch verschwindet. Dabei lassen sich Normierungsfragen für die so konstruierte Hilbertsche Modulform $p(\theta_0, \dots, \theta_9)$ gleich miterledigen.

In den beiden folgenden Abschnitten werden nun für teils bereits vorhandene, teils noch zu konstruierende, später benötigte Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ explizite, auf dem geschilderten Weg gewonnene Ausdrücke als Γ_K -symmetrische Polynome in den θ_i angegeben.

2.2. Der Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

In diesem und dem nächsten Abschnitt wird die Abkürzung

$$\theta_{i_1 \dots i_r}^a := \theta_{i_1}^a \cdot \dots \cdot \theta_{i_r}^a \quad (a \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_r \in \{0, 1, \dots, 9\})$$

verwendet.

Bereits vorhanden als Ausdruck in den Thetareihen θ_i ist die nichttriviale schiefsymmetrische Spitzenform vom Gewicht 5 $\theta_5 = \prod_{i=1}^9 \theta_i = \theta_{0123456789}$ bzw. normiert:

$$s_5 := 2^{-6} \theta_{0123456789} \in (\Gamma_K, 5)_0^- \text{ mit } a(s_5, [1, 1]) = 1, s_5^2 = s_{10},$$

in Übereinstimmung mit der Normierung von s_{10} in (21), S.19 und mit richtigem Vorzeichen von s_5 (vgl. [35], S. 99, 100). Die einfachsten Darstellungen der normierten Eisensteinreihe $g_2 \in (\Gamma_K, 2)^+$ und der in (20), S.19 definierten normierten Spitzenform $s_6 \in (\Gamma_K, 6)_0^+$ als Γ_K -symmetrische Polynome in den θ_i lauten:

$$\begin{aligned} g_2 &= 2^{-2} (\theta_0^4 + \theta_1^4 + \theta_2^4 - \theta_3^4 + \theta_4^4 + \theta_5^4 + \theta_6^4 - \theta_7^4 + \theta_8^4 - \theta_9^4) \\ &= \theta_{0145} - \theta_{1279} - \theta_{3478} + \theta_{0268} + \theta_{3569} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_6 &= 2^{-7} \cdot 7^{-1} (\theta_{012}^4 - \theta_{368}^4 - \theta_{345}^4 - \theta_{379}^4 - \theta_{147}^4 - \theta_{159}^4 - \theta_{269}^4 - \theta_{278}^4 + \theta_{048}^4 + \theta_{056}^4) \\ &= 2^{-8} (\theta_{012478}^2 + \theta_{012569}^2 + \theta_{034568}^2 + \theta_{236789}^2 + \theta_{134579}^2). \end{aligned}$$

Daß die rechten Seiten jeweils das richtige Transformationsverhalten haben und die Normierungskonstanten richtig gewählt sind, prüft man anhand von Tabelle (27), S.23 leicht nach, wobei man $g_2(i\infty) = a(g_2, [0, 0]) = 1$ und $s_6|_{\mathcal{D}} = s_6\pi = 2\Delta$ (vgl. (20), S.19) sowie Lemma 7(c), S. 21 beachtet.

In § 4 wird die Existenz einer nichttrivialen symmetrischen Spitzenform vom Gewicht 15 benötigt. Es gilt:

$$(30) \quad s_{15} := -2^{-18} (\theta_{07}^9 \theta_{18}^5 \theta_{24}^1 - \theta_{25}^9 \theta_{16}^5 \theta_{09}^1 + \theta_{58}^9 \theta_{03}^5 \theta_{46}^1 - \theta_{09}^9 \theta_{25}^5 \theta_{16}^1 + \theta_{09}^9 \theta_{16}^5 \theta_{25}^1 - \theta_{67}^9 \theta_{23}^5 \theta_{89}^1 \\ + \theta_{18}^9 \theta_{24}^5 \theta_{07}^1 - \theta_{24}^9 \theta_{18}^5 \theta_{07}^1 - \theta_{46}^9 \theta_{03}^5 \theta_{58}^1 - \theta_{24}^9 \theta_{07}^5 \theta_{18}^1 - \theta_{89}^9 \theta_{67}^5 \theta_{23}^1 - \theta_{07}^9 \theta_{24}^5 \theta_{18}^1 \\ + \theta_{89}^9 \theta_{23}^5 \theta_{67}^1 - \theta_{49}^9 \theta_{13}^5 \theta_{57}^1 + \theta_{16}^9 \theta_{09}^5 \theta_{25}^1 - \theta_{03}^9 \theta_{46}^5 \theta_{58}^1 + \theta_{16}^9 \theta_{25}^5 \theta_{09}^1 - \theta_{46}^9 \theta_{58}^5 \theta_{03}^1 \\ - \theta_{25}^9 \theta_{09}^5 \theta_{16}^1 - \theta_{57}^9 \theta_{49}^5 \theta_{13}^1 + \theta_{67}^9 \theta_{89}^5 \theta_{23}^1 + \theta_{58}^9 \theta_{46}^5 \theta_{03}^1 + \theta_{57}^9 \theta_{13}^5 \theta_{49}^1 - \theta_{23}^9 \theta_{89}^5 \theta_{67}^1 \\ + \theta_{18}^9 \theta_{07}^5 \theta_{24}^1 + \theta_{03}^9 \theta_{58}^5 \theta_{46}^1 + \theta_{23}^9 \theta_{67}^5 \theta_{89}^1 + \theta_{49}^9 \theta_{57}^5 \theta_{13}^1 - \theta_{13}^9 \theta_{57}^5 \theta_{49}^1 + \theta_{13}^9 \theta_{49}^5 \theta_{57}^1)$$

ist eine nichttriviale normierte Spitzenform aus $(\Gamma_K, 15)_0^+$ mit

$$s_{15}|_{\mathcal{D}} = s_{15}\pi = e_6 \Delta^2 \quad \text{und den Anfangsfourierkoeffizienten}$$

$$a(s_{15}, [m, n]) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2, m = 0 \\ 0 & \text{für } n \leq 2, m \text{ sonst} \\ -1 & \text{für } n = 3, m = \pm 5 \\ 0 & \text{für } n = 3, m = \pm 3 \\ -275 & \text{für } n = 3, m = \pm 1 \end{cases}.$$

Begründung: Mittels Tabelle (27) kann man ohne weiteres, wenngleich etwas mühsam, nachprüfen, daß s_{15} aus $(\Gamma_K, 15)_0^+$ ist. Restriktion auf die Diagonale gemäß (27) ergibt:

$$s_{15}|_{\mathcal{D}} = -2^{-18} (2\theta_2^{20} \theta_3^{24} \theta_4^{16} - 2\theta_2^{20} \theta_3^{16} \theta_4^{24} - 2\theta_2^{16} \theta_3^{24} \theta_4^{20} \\ + 2\theta_2^{24} \theta_3^{16} \theta_4^{20} - 2\theta_2^{16} \theta_3^{20} \theta_4^{24} + 2\theta_2^{24} \theta_3^{20} \theta_4^{16}) \\ = 2^{-17} \cdot \theta_2^{16} \theta_3^{16} \theta_4^{16} (-\theta_2^4 \theta_3^8 + \theta_2^8 \theta_3^4 + \theta_3^8 \theta_4^4 - \theta_2^8 \theta_4^4 + \theta_3^4 \theta_4^8 - \theta_2^4 \theta_3^8) \\ = 2^{-17} \cdot 2^{16} \Delta^2 \cdot 2e_6 = e_6 \Delta^2 \quad \text{nach Lemma 7, S.21.}$$

Nach Lemma 2(a), S.12 gilt $a(s_{15}, [\pm n, n]) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und nach Lemma 4(b), S.16 gilt unter Beachtung von

$$a(e_6, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ -504 & \text{für } n = 1 \end{cases}, \quad a(\Delta, n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ -24 & \text{für } n = 2 \end{cases} \quad (\text{vgl. etwa Serre [40], S.150, 156})$$

sowie von $[4, 2] \sim [1, 1]$, $[5, 3] \sim [0, 2]$ (vgl. (13), S.12) weiter

$$1 = a(e_6 \Delta^2, 2) = a(s_{15}\pi, 2) = a(s_{15}, [0, 2]), \\ -552 = a(e_6 \Delta^2, 3) = a(s_{15}\pi, 3) = -2 + 2a(s_{15}, [1, 3]) \Rightarrow a(s_{15}, [1, 3]) = -275,$$

womit alles gezeigt ist.

Bemerkungen: 1) Die angegebenen Thetaausdrücke für g_2 , s_5 , s_6 , s_{15}

gelten nicht nur für $D = 5$, sondern für alle Diskriminanten $D \equiv 5(8)$,

$D = u^2 + v^2$, v gerade, wobei allerdings in den Fällen $u \equiv 1(4)$, $v \equiv 6(8)$ oder

$u \equiv 3(4)$, $v \equiv 2(8)$ im zweiten Ausdruck für g_2 und im Ausdruck für s_{15}

die Vorzeichen all der Summanden, die θ_3 enthalten, zu ändern sind. Außerdem sind die angegebenen Ausdrücke für s_5 , s_6 , s_{15} für $D \neq 5$ i.allg. nicht mehr normiert.

- 2) Der Thetaausdruck für s_{15} wurde nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren mit Hilfe eines Computers, die restlichen Ausdrücke unschwer von Hand ermittelt. Als Entschuldigung für die Inanspruchnahme eines Computers im Falle von s_{15} mag folgendes Zitat aus Frobenius' in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Antrittsrede dienen, das Siegel seiner 1960 erschienenen Arbeit über "Moduln Abelscher Funktionen" (Ges. Abh. III, Nr. 77, S. 373-435) vorangestellt hat:

"In der Theorie der Thetafunktionen ist es leicht, eine beliebig große Menge von Relationen aufzustellen, aber die Schwierigkeit beginnt da, wo es sich darum handelt, aus diesem Labyrinth von Formeln einen Ausweg zu finden. Die Beschäftigung mit jenen Formelmassen scheint auf die mathematische Phantasie eine verdorrende Wirkung auszuüben."

- 3) Für g_2 gibt es im Gegensatz zu s_6 außer den beiden angegebenen keine weiteren derartigen Darstellungen als Γ_K -symmetrisches Polynom in den θ_i . Für s_{15} ist das angegebene Polynom das kürzest mögliche und einzige mit 30 Summanden; alle weiteren für s_{15} in Frage kommenden Ausdrücke haben mindestens 60 Summanden.

2.3. Der Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$, Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$

Wie zuvor wird die Abkürzung $\theta_{i_1 \dots i_r}^a = \theta_{i_1}^a \cdot \dots \cdot \theta_{i_r}^a$ verwendet. Alle im folgenden angegebenen Thetaausdrücke wurden unschwer von Hand ermittelt.

Da die Menge der Charakteristiken für $D \equiv 0(8)$ in zwei Transitivitätsgebiete zerfällt (vgl. (28), S.24), läßt sich $\Theta\psi = \theta_{0123456789}$ in zwei Teilprodukte aufspalten, die selbst wieder Modulformen zu Γ_K sind: θ_{0123} und θ_{456789} bzw. normiert:

$$s_2 := 2^{-2} \theta_{0123} = -2^{-4} \cdot 3^{-1} (\theta_4^4 - \theta_5^4 - \theta_6^4 - \theta_7^4 + \theta_8^4 + \theta_9^4)$$

ist eine nichttriviale normierte Spitzenform aus $(\Gamma_K, 2, v_2)_0^-$ mit

$$(31) \quad a(s_2, [m, n]) = 0 \text{ für } n \equiv 0(2) \text{ oder } m \equiv 0(4) \text{ sowie } a(s_2, [2, 1]) = 1 \text{ und mit}$$

$$s_2|_{\mathcal{D}} \equiv 0 \text{ sowie } s_2|_{\mathcal{C}}(\zeta) = 2^{-4} \vartheta_2^4(z) \vartheta_4^4(2z) \text{ für alle}$$

$$\zeta = (-\varepsilon' \sqrt{2} z, \varepsilon \sqrt{2} z) \in \mathcal{C}, \text{ also } s_2(\zeta) \neq 0 \text{ für alle } \zeta \in \mathcal{C}.$$

$$s_3 := 2^{-4} \theta_{456789}$$

- (32) ist eine nichttriviale normierte Spitzenform aus $(\Gamma_K, 3, v_3)_0^+$ mit $a(s_3, [m, n]) = 0$ für $n \equiv 0(2)$ oder $m \equiv 2(4)$ sowie $a(s_3, [0, 1]) = 1$ und mit $s_3|_{\mathcal{C}} \equiv 0$ sowie $s_3|_{\mathcal{D}} = 2^{-4} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 = \sqrt{\Delta}$, also $s_3(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathcal{D}$.

Aus (31) und (32) folgt sofort

- (33) $s_4 := s_2^2 \in (\Gamma_K, 4)_0^+$ und $s_6 := s_3^2 \in (\Gamma_K, 6)_0^+$ sind normierte Spitzenformen mit $a(s_4, [0, 0]) = 0$, $a(s_4, [2, 1]) = 1$, $a(s_4, [0, 1]) = -2$ und $a(s_6, [0, 0]) = a(s_6, [2, 1]) = 0$, $a(s_6, [0, 1]) = 1$, $a(s_6, [4, 2]) = -2$ sowie mit $s_4|_{\mathcal{D}} \equiv 0$, $s_4|_{\mathcal{C}}(\zeta) = 2^{-8} \vartheta_2^8(z) \vartheta_4^8(2z)$ für alle $\zeta = (-\varepsilon' \sqrt{2} z, \varepsilon \sqrt{2} z) \in \mathcal{C}$ und $s_6|_{\mathcal{D}} = \Delta$, $s_6|_{\mathcal{C}} \equiv 0$.

Zur Begründung von (31) und (32) beachte man wieder Tabelle (27), S.23 sowie, was $s_2|_{\mathcal{C}}$ und $s_3|_{\mathcal{D}}$ angeht, Lemma 7, S.21. Die Normierungskonstanten und die Fourierkoeffizienten erhält man unter Verwendung von Lemma 2, S.12 und den in (23), S.19 angegebenen Fourierkoeffizienten von $(s_2 s_3)^2 = 2^{-12} \theta^2 \psi$, wobei man beachte, daß für s_3 nach Lemma 4(b), S.16, 17 $a(s_3, [0, 1]) = a(s_3 \pi, 1) = a(\sqrt{\Delta}, 1) = 1$ gilt. Daß s_2 das richtige Vorzeichen hat, folgt aus [35], S.116, 117.

Die einfachsten Darstellungen der normierten Eisensteinreihe g_2 aus $(\Gamma_K, 2)_0^+$ als Γ_K -symmetrisches Polynom in den θ_i sowie deren Restriktion auf die Kurve $\mathcal{C}$ (beachte Lemma 7(d), S.21) lauten:

- (34) $g_2 = \theta_{45}^2 - \theta_{79}^2 + \theta_{68}^2 = 2^{-1} (\theta_0^4 + \theta_1^4 + \theta_2^4 + \theta_3^4)$ mit $g_2|_{\mathcal{C}}(\zeta) = 2^{-2} \vartheta_2^8(z) + \vartheta_4^8(2z)$ für $\zeta = (-\varepsilon' \sqrt{2} z, \varepsilon \sqrt{2} z) \in \mathcal{C}$.

Weiter werden im folgenden Paragraphen noch die Existenz einer nichttrivialen Spitzenform aus $(\Gamma_K, 3, v_2)_0^+$ und einer nichttrivialen Spitzenform aus $(\Gamma_K, 6, v_3)_0^+$ benötigt. Konstruktionsversuche mit den Thetareihen θ_i liefern als einfachste Ausdrücke

- (35) $\hat{s}_3 := 2^{-3} \cdot 3^{-1} (\theta_0^6 - \theta_1^6 - \theta_2^6 - \theta_3^6)$
 $= 2^{-5} (\theta_{467}^2 + \theta_{589}^2 - \theta_{569}^2 + \theta_{469}^2 - \theta_{478}^2 + \theta_{578}^2 + \theta_{489}^2 + \theta_{567}^2)$ ist eine nichttriviale normierte Spitzenform aus $(\Gamma_K, 3, v_2)_0^+$ mit $a(\hat{s}_3, [m, n]) = 0$ für $n \equiv 0(2)$ oder $m \equiv 0(4)$ sowie $a(\hat{s}_3, [2, 1]) = 1$ und mit $\hat{s}_3|_{\mathcal{D}} = 2\sqrt{\Delta}$.

$$\hat{s}_6 := -2^{-5}(\theta_{45}^4 \theta_{68}^2 - \theta_{79}^4 \theta_{68}^2 - \theta_{68}^4 \theta_{45}^2 + \theta_{79}^4 \theta_{45}^2 - \theta_{68}^4 \theta_{79}^2 + \theta_{45}^4 \theta_{79}^2)$$

(36) $\hat{s}_6$ ist eine nichttriviale normierte Spitzenform aus $(\Gamma_K, 6, v_3)_0^+$ mit $a(\hat{s}_6, [m, n]) = 0$ für $n \equiv 0(2)$ oder $m \equiv 2(4)$ sowie $a(\hat{s}_6, [0, 1]) = 1$ und mit $\hat{s}_6|_{\mathcal{D}} = e_6 \sqrt{\Delta}$ sowie $\hat{s}_6|_{\mathcal{C}(\zeta)} = 2^{-9}(4\vartheta_2^8(z)\vartheta_4^{16}(2z) - \vartheta_2^{16}(z)\vartheta_4^8(2z))$ für $\zeta = (-\epsilon' \sqrt{2} z, \epsilon \sqrt{2} z) \in \mathcal{C}$.

Die Richtigkeit von (34), (35), (36) ist wieder auf die gleiche Weise wie zuvor leicht zu sehen.

- Bemerkungen:* 1) Die angegebenen Thetaausdrücke für $g_2, s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6$ gelten nicht nur für $D = 8$, sondern für alle Diskriminanten $D \equiv 0(8)$, $D = u^2 + v^2$, wobei die Ausdrücke für die Spitzenformen $s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6$ für $D \neq 8$ allerdings i.allg. nicht mehr normiert sind.
- 2) Man bemerkt, daß $g_2, s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6$ sämtlich bereits durch die letzten 6 Thetareihen $\theta_4, \dots, \theta_9$ allein dargestellt werden können. Bis auf s_3 , für das der angegebene der einzig mögliche derartige Thetaausdruck ist, lassen sich diese Modulformen auch durch die ersten 4 Thetareihen ausdrücken; der kürzest mögliche Thetaausdruck für $\hat{s}_6$ in diesen 4 Thetareihen hat aber bereits 24 Summanden: $\hat{s}_6 = -2^{-5} \cdot (\theta_0^6 \theta_1^4 \theta_2^2 \pm \dots)$.

Nun wird, Hammond [14] folgend, noch rasch der Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ als Ausgangspunkt für den nächsten Paragraphen hergeleitet.

Da $s_2 s_3 = 2^{-6} \theta \psi$ nur einfache Nullstellen hat und

$$\mathcal{N}_{\theta \psi} = \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu < \mathcal{D} > \cup \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu < \mathcal{C} >$$

als Nullstellengebilde besitzt (vgl. S.18), haben s_2 und s_3 ebenfalls nur einfache Nullstellen und ihre genauen Nullstellengebilde lauten, wenn man (31) und (32) beachtet:

$$\mathcal{N}_{s_2} = \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu < \mathcal{D} > \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{s_3} = \bigcup_{\mu \in \Gamma_K} \mu < \mathcal{C} > .$$

Hieraus folgt sofort

(37) Jede auf $\mathcal{C}$ identisch verschwindende Modulform ist durch $s_3 \in (\Gamma_K, 3, v_3)_0^+$ teilbar.

(38) Jede auf $\mathcal{D}$ identisch verschwindende Modulform, insbesondere also jede schiefsymmetrische Modulform, ist durch $s_2 \in (\Gamma_{K,2,v_2})_0^-$ teilbar.

(39) Jede symmetrische auf $\mathcal{D}$ identisch verschwindende Modulform f ist durch s_4 teilbar ($\frac{f}{s_2}$ ist schiefsymmetrisch!).

Da s_4 somit das Ideal Kern $\hat{\pi}$ in Lemma 6, S.17 erzeugt, d.h. die Voraussetzung für h_r erfüllt und mit $h_2 := g_2$ und $h_6 := s_6$ wegen $g_2\pi = e_4$ und $s_6\pi = \Delta$ (vgl. (19), S.18 u. (33), S.28) auch die restlichen Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt sind, erhält man als Struktursatz für $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ (Hammond [14], Theorem 6.2, S.514):

SATZ 2. Der graduierte Ring der symmetrischen Hilbertschen Modulformen geraden Gewichts mit trivialem Multiplikatorsystem zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ ist ein Polynomring der Gestalt

$$R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6] .$$

Die Spitzenformen s_4 und s_6 können auch durch die Eisensteinreihen g_4 und g_6 ersetzt werden: Fourierkoeffizientenvergleich anhand von (15), S.14 und (33), S.28 ergibt

$$\begin{aligned} s_4 &= 2^{-6} \cdot 3^{-2} \cdot 11 (g_2^2 - g_4), \\ s_6 &= 2^{-8} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-1} \cdot 13^{-1} (-5^2 \cdot 7^2 g_2^3 + 3 \cdot 11 \cdot 59 g_2 g_4 - 2 \cdot 19^2 g_6) \end{aligned}$$

und somit $R^{(2)}(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6] = \mathbb{C}[g_2, g_4, g_6]$. Gleichzeitig ermöglicht diese Darstellung die leichte Berechnung der Fourierkoeffizienten von s_4 und s_6 aufgrund der bekannten Fourierkoeffizienten von g_2, g_4, g_6 . So erhält man etwa unter Verwendung von (15), S.14 folgende im nächsten Paragraphen benötigte Fourierkoeffizienten von s_4 und s_6 :

$$(40) \quad a(s_4, [4, 2]) = -4, \quad a(s_6, [2, 2]) = -16, \quad a(s_6, [6, 3]) = 32 .$$

§ 3 HILBERTSCHE MODULFORMEN UND MODULFUNKTIONEN ZU $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$

3.1. Elementarer Beweis des Struktursatzes für $R[\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}]$

Ziel dieses Abschnitts ist die Gewinnung des vollständigen Struktursatzes für den graduierten Ring

$$R[\Gamma_K] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} [\Gamma_K, k], \quad [\Gamma_K, k] = \bigoplus_{i=1}^4 (\Gamma_K, k, v_i)$$

aller Hilbertschen Modulformen beliebigen Gewichts und beliebigen Multiplikatorsystems zu $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ auf elementarem Wege.

Da sich jede Modulform $f \in (\Gamma_K, k, v_i)$ in einen symmetrischen und einen schiefssymmetrischen Anteil zerlegen läßt:

$$f = f^+ + f^- \quad \text{mit} \quad f^+ \in (\Gamma_K, k, v_i)^+ \quad \text{und} \quad f^- \in (\Gamma_K, k, v_i)^-,$$

und da der schiefssymmetrische Anteil nach (38) durch die schiefssymmetrische Modulform s_2 teilbar und der Quotient also wieder eine symmetrische Modulform ist, genügt es, die Struktur der Räume der symmetrischen Modulformen $(\Gamma_K, k, v_i)^+$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $i = 1, \dots, 4$ zu bestimmen. Nun gilt weiter, daß jede Modulform $f \in (\Gamma_K, k, v_i)^+$ mit $k \equiv 1(2), i = 1, 3$ oder $k \equiv 0(2), i = 2, 4$ auf der Kurve $\mathcal{C}$ identisch verschwindet; denn wegen $v_i(U)^{-1}(-1)^k = -1$ für $k \equiv 1(2), i = 1, 3$ oder $k \equiv 0(2), i = 2, 4$ (vgl. Lemma 1, S.11, $U = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$) gilt mit $\zeta \in H_1$

$$\begin{aligned} f((\zeta, \varepsilon^2 \zeta)) &= f(U^{-1} \langle (\varepsilon^2 \zeta, \zeta) \rangle) = v_i(U)^{-1}(-1)^k f((\varepsilon^2 \zeta, \zeta)) = \\ &= -f((\varepsilon^2 \zeta, \zeta)) = -f((\zeta, \varepsilon^2 \zeta)) \quad (f \text{ symmetrisch!}), \end{aligned}$$

womit wegen $\mathcal{C} = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in H_1^2 \mid \varepsilon^2 \zeta_1 = \zeta_2\}$ die Behauptung folgt. Da eine auf $\mathcal{C}$ identisch verschwindende Modulform nach (37) durch s_3 teilbar ist, folgt somit

$$(\Gamma_K, k, v_i)^+ = s_3 \cdot (\Gamma_K, k-3, v_j)^+ \quad \text{mit} \quad (i, j) = \begin{cases} (1, 3), (3, 1) & \text{für } k \equiv 1(2) \\ (2, 4), (4, 2) & \text{für } k \equiv 0(2). \end{cases}$$

Da die Modulformen aus $(\Gamma_K, k, v_i)^+ = (\Gamma_K, k)^+$ für $k \equiv 0(2)$ nach Satz 2, S.30 bereits bekannt sind, sind also nur noch die Modulformen aus den Räumen

$$(41) \quad (\Gamma_K, k, v_2)^+, k \equiv 1(2); \quad (\Gamma_K, k, v_3)^+, k \equiv 0(2); \quad (\Gamma_K, k, v_4)^+, k \equiv 1(2),$$

die nach Lemma 2(b), S.12 aus lauter Spitzenformen bestehen, zu bestimmen.

Man kann nun ähnlich einfach wie bei Gundlach [11], S.242,247 im Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ argumentieren:

Ist f aus einem der in (41) aufgeführten Räume und $f|_{\mathcal{D}} \equiv 0$, so ist f nach (39), S.30 durch s_4 teilbar und der Quotient, eine Modulform eines um 4 verminderten Gewichts, liegt wieder in einem Raum gleichen Typs wie f . Es ist daher naheliegend, in jedem dieser drei Fälle nach einer auf $\mathcal{D}$ nicht identisch verschwindenden Modulform minimalen Gewichts zu fragen. Wenn man sich jeweils eine solche Modulform verschafft hat und weiter zeigen kann, daß diese alle anderen zum gleichen Raumtyp wie sie selbst gehörigen Modulformen teilt, so ist man fertig, da die Quotienten jeweils wieder in dem bereits bekannten Ring $R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ liegen.

Zunächst zu den beiden ersten Fällen: Sei $f \in (\Gamma_{K,k,v_2})_0^+$, $k \equiv 1(2)$ bzw. $f \in (\Gamma_{K,k,v_3})_0^+$, $k \equiv 0(2)$ und $f|_{\mathcal{D}} = f\pi \neq 0$. Nach Lemma 4, S.16,17 und Lemma 7(e), S.21 ist $f\pi \in (\Gamma_1, 2k, v_0)_0 = \sqrt{\Delta}(\Gamma_1, 2k-6)$ mit $2k-6 \equiv 0 \pmod{4}$ bzw. $2k-6 \equiv 2 \pmod{4}$, also wegen $f\pi \neq 0$ notwendig $k \geq 3$ bzw. $k \geq 6$. Konstruktionsversuche mittels Thetareihen (siehe vorigen Paragraphen) liefern dann

$\hat{s}_3 \in (\Gamma_{K,3,v_2})_0^+$ mit $\hat{s}_3|_{\mathcal{D}} = 2\sqrt{\Delta}$ bzw. $\hat{s}_6 \in (\Gamma_{K,6,v_3})_0^+$ mit $\hat{s}_6|_{\mathcal{D}} = e_6\sqrt{\Delta}$ (vgl. (35), (36), S.28,29) als auf $\mathcal{D}$ nicht identisch verschwindende Modulformen minimalen Gewichts.

Nun zum dritten Fall: Sei $f \in (\Gamma_{K,k,v_4})_0^+$, $k \equiv 1(2)$ und $f|_{\mathcal{D}} \neq 0$. Nach Lemma 4 ist $f\pi$ aus $(\Gamma_1, 2k)_0$ mit $2k \equiv 2 \pmod{4}$. Wegen $f\pi \neq 0$ gilt daher notwendig $k \geq 9$ (hier ist wesentlich, daß f und damit $f\pi$ eine Spitzenform ist) und $f\pi = e_6\Delta \cdot p(e_4, \Delta)$ mit einem isobaren Polynom $p \in R^{(4)}(\Gamma_1) = \mathbb{C}[e_4, \Delta]$. Eine auf $\mathcal{D}$ nicht identisch verschwindende Modulform minimalen Gewichts ist in diesem Falle offenbar $\hat{s}_3\hat{s}_6 \in (\Gamma_{K,9,v_4})_0^+$ mit $\hat{s}_3\hat{s}_6|_{\mathcal{D}} = 2e_6\Delta$, und $\hat{s}_3\hat{s}_6$ teilt jede andere Modulform $f \in (\Gamma_{K,k,v_4})_0^+$, $k \equiv 1(2)$: $f\pi$ besitzt, wie eben gezeigt wurde, die Darstellung $f\pi = e_6\Delta \cdot p(e_4, \Delta)$. Wegen $g_2\pi = e_4$ und $s_6\pi = \Delta$ (vgl. (19), S.18 u. (33), S.28) sowie $\hat{s}_3\hat{s}_6\pi = 2e_6\Delta$ folgt

$$(f - \frac{1}{2} \hat{s}_3\hat{s}_6 p(g_2, s_6))\pi \equiv 0,$$

d.h. $f - \frac{1}{2} \hat{s}_3\hat{s}_6 p(g_2, s_6)$ ist teilbar durch s_4 und man erhält

$$f = \frac{1}{2} \hat{s}_3\hat{s}_6 p(g_2, s_6) + f_1 \cdot s_4$$

mit einem $f_1 \in (\Gamma_{K,k-4,v_4})_0^+$. Wiederholung des Verfahrens für f_1 usw. bis

man auf ein f_n negativen Gewichts stößt ($\Rightarrow f_n \equiv 0$), zeigt, daß man überall $\frac{1}{2} \hat{s}_3 \hat{s}_6$ ausklammern kann, d.h. $\hat{s}_3 \hat{s}_6$ teilt f und man hat somit

$$(\Gamma_{K,k,v_4})^+ = \hat{s}_3 \hat{s}_6 (\Gamma_{K,k-9})^+ \quad \text{für } k \equiv 1(2) .$$

Nach demselben Verfahren kann man zeigen, daß $\hat{s}_3$ jede Modulform aus $(\Gamma_{K,k,v_2})^+$, $k \equiv 1(2)$ und $\hat{s}_6$ jede Modulform aus $(\Gamma_{K,k,v_3})^+$, $k \equiv 0(2)$ teilt, oder man argumentiert wie folgt: Es ist

$$\hat{s}_3 (\Gamma_{K,k,v_3})^+ \subset (\Gamma_{K,k+3,v_4})^+ = \hat{s}_3 \hat{s}_6 (\Gamma_{K,k-6})^+ \subset \hat{s}_3 (\Gamma_{K,k,v_3})^+ \quad \text{für } k \equiv 0(2),$$

$$\hat{s}_6 (\Gamma_{K,k,v_2})^+ \subset (\Gamma_{K,k+6,v_4})^+ = \hat{s}_3 \hat{s}_6 (\Gamma_{K,k-3})^+ \subset \hat{s}_6 (\Gamma_{K,k,v_2})^+ \quad \text{für } k \equiv 1(2),$$

d.h. überall gilt Gleichheit. Da die holomorphen Funktionen auf H_1^2 einen Integritätsring bilden, ist Kürzen erlaubt, und man hat

$$(\Gamma_{K,k,v_2})^+ = \hat{s}_3 (\Gamma_{K,k-3})^+ \quad \text{für } k \equiv 1(2),$$

$$(\Gamma_{K,k,v_3})^+ = \hat{s}_6 (\Gamma_{K,k-6})^+ \quad \text{für } k \equiv 0(2).$$

Insgesamt wurde also gezeigt:

LEMMA 8 (Gundlach [13]). Jeder Raum $(\Gamma_{K,k,v_i})^+$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$, $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, $i \in \{1, \dots, 4\}$) ist in der Form

$$(\Gamma_{K,k,v_i})^\pm = f \cdot (\Gamma_{K,k-\tilde{k}})^+ \quad \text{mit } k-\tilde{k} \equiv 0(2)$$

darstellbar, wobei f ein geeignetes Teilprodukt von $1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_6$ ist. Wegen $R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ und $s_4 = s_2^2$, $s_6 = s_3^2$ gilt daher

$$R[\Gamma_K] = \mathbb{C}[g_2, s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6],$$

wobei das angegebene Erzeugendensystem von $R[\Gamma_K]$ minimal ist, d.h. es gibt kein Erzeugendensystem mit weniger als 5 Erzeugenden.

Da $\hat{s}_3^2$ und $\hat{s}_6^2$ symmetrische Modulformen geraden Gewichts sind, also $\hat{s}_3, \hat{s}_6$ jeweils einer quadratischen Relation über $\mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ genügen, sind zur vollen Aufklärung der Struktur von $R[\Gamma_K]$ nur noch diese beiden quadratischen Relationen zu bestimmen.

Zuerst zu $\hat{s}_3$. Als symmetrische Spitzenform vom Gewicht 6 hat $\hat{s}_3^2$ nach Satz 2, S.30 die Form $\hat{s}_3^2 = a_1 s_6 + a_2 g_2 s_4$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Aus den in (35), S.28

angegebenen Fourierkoeffizienten von $\hat{s}_3$ erhält man $a(\hat{s}_3^2, [2, 1]) = 1$, $a(\hat{s}_3^2, [0, 1]) = 2$. Fourierkoeffizientenvergleich unter Verwendung von

$$(42) \quad \begin{array}{c|ccccc} & [m, n] & [0, 0] & [2, 1] & [0, 1] & [4, 2] \\ \hline a(g_2, [m, n]) & & 1 & * & * & * \\ \hline a(s_4, [m, n]) & & 0 & 1 & -2 & * \\ \hline a(s_6, [m, n]) & & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad (\text{vgl. (33), S.28})$$

ergibt $a_2 = 1$ und $a_1 = 4$, also

$$\hat{s}_3^2 = 4s_6 + g_2s_4.$$

Für $\hat{s}_6$ schließt man zunächst ähnlich:

Als symmetrische Spitzenform vom Gewicht 12 zu Γ_K besitzt $\hat{s}_6^2$ nach Satz 2, S.30 die Gestalt

$$\hat{s}_6^2 = b_1s_6^2 + b_2g_2s_4s_6 + b_3g_2^3s_6 + b_4s_4^3 + b_5g_2^2s_4^2 + b_6g_2^4s_4$$

mit $b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, 6$. Aus den in (36), S.29 angegebenen Fourierkoeffizienten von $\hat{s}_6$ erhält man $a(\hat{s}_6^2, [2, 1]) = 0$, $a(\hat{s}_6^2, [0, 1]) = 1$, sowie, unter Beachtung von $[8, 3] \sim [0, 1]$ (vgl. (13), S.12), $a(\hat{s}_6^2, [4, 2]) = 2$. Fourierkoeffizientenvergleich unter Verwendung von (42) ergibt $b_6 = 0$, $b_3 = 1$, $b_5 = 4$, und man hat somit

$$(43) \quad \hat{s}_6^2 = b_1s_6^2 + b_2g_2s_4s_6 + g_2^3s_6 + b_4s_4^3 + 4g_2^2s_4^2.$$

Restringiert man (43) auf die Diagonale und beachtet $g_2|_{\mathcal{D}} = e_4$, $s_4|_{\mathcal{D}} = 0$, $s_6|_{\mathcal{D}} = \Delta$, $\hat{s}_6|_{\mathcal{D}} = e_6\sqrt{\Delta}$, so folgt $e_6^2\Delta = b_1\Delta^2 + e_4^3\Delta$, also $b_1 = -(e_4^3 - e_6^2)\Delta^{-1} = -1728$ (vgl. Lemma 5, S.17).

Nun restringiere man (43) auf die Kurve $\mathcal{C}$. Mit den in (33), (34), (36), S.28, 29 angegebenen Ausdrücken für $s_4|_{\mathcal{C}}$, $s_6|_{\mathcal{C}}$, $g_2|_{\mathcal{C}}$, $\hat{s}_6|_{\mathcal{C}}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & 2^{-18} (4\vartheta_2^8(z)\vartheta_4^{16}(2z) - \vartheta_2^{16}(z)\vartheta_4^8(2z))^2 \\ &= b_4 \cdot 2^{-24} \vartheta_2^{24}(z)\vartheta_4^{24}(2z) + 2^{-18} (4\vartheta_4^8(2z) + \vartheta_2^8(z))^2 (\vartheta_2^8(z)\vartheta_4^8(2z))^2 \end{aligned}$$

für alle $\zeta = (-\epsilon'\sqrt{2}z, \epsilon\sqrt{2}z) \in \mathcal{C}$ ($z \in H_1$) und hieraus $b_4 = -1024$, also

$$(44) \quad \hat{s}_6^2 = -1728s_6^2 + b_2g_2s_4s_6 + g_2^3s_6 - 1024s_4^3 + 4g_2^2s_4^2.$$

Aus den in (36), S.29 angegebenen Fourierkoeffizienten von $\hat{s}_6$ erhält man, wenn man $[8,3] \sim [0,1]$ und $[12,5] \sim [-4,3]$ (vgl. (13), S.12) beachtet, $a(\hat{s}_6^2, [2,2]) = 2a(\hat{s}_6, [4,3])$ und $a(\hat{s}_6^2, [6,3]) = 4a(\hat{s}_6, [4,3])$. Fourierkoeffizientenvergleich in (44) für $[2,2]$ und $[6,3]$ unter Verwendung der in (42) und in (40), S.30 angegebenen Fourierkoeffizienten von g_2, s_4, s_6 sowie von $a(g_2, [2,1]) = 48$ (vgl. (15), S.14) ergibt dann $b_2 = -288$, und die quadratische Relation für $\hat{s}_6$ lautet nunmehr vollständig:

$$\hat{s}_6^2 = -1728s_6^2 - 288g_2s_4s_6 + g_2^3s_6 - 1024s_4^3 + 4g_2^2s_4^2.$$

Damit ist die Struktur von $R[\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}]$ völlig aufgeklärt und man erhält als Hauptergebnis dieser Arbeit:

SATZ 3. (a) Der graduierte Ring der Hilbertschen Modulformen beliebigen Gewichts und beliebigen Multiplikatorsystems zu $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ besitzt die Darstellung

$$R[\Gamma_K] = \mathbb{C}[g_2, s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6]$$

mit den aus Abschnitt 2.3. bekannten normierten Modulformen

$$\begin{aligned} g_2 &\in (\Gamma_K, 2)^+, \quad s_2 \in (\Gamma_K, 2, v_2)_0^-, \quad s_3 \in (\Gamma_K, 3, v_3)_0^+, \\ \hat{s}_3 &\in (\Gamma_K, 3, v_2)_0^+, \quad \hat{s}_6 \in (\Gamma_K, 6, v_3)_0^+, \end{aligned}$$

die ein minimales Erzeugendensystem von $R[\Gamma_K]$ bilden und alle durch die 10 Thetanullwerte $\theta_i, i = 0, 1, \dots, 9$, bzw. sogar bereits durch die 6 $\theta_i, i = 4, 5, \dots, 9$, darstellbar sind. Die Spitzenformen $s_2, s_3, \hat{s}_3, \hat{s}_6$ genügen über dem Polynomring

$$R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$$

den quadratischen Relationen

$$\begin{aligned} s_2^2 &= s_4 \quad (\text{Def.}), \quad s_3^2 = s_6 \quad (\text{Def.}), \quad \hat{s}_3^2 = 4s_6 + g_2s_4, \\ (45) \quad \hat{s}_6^2 &= -1728s_6^2 - 288g_2s_4s_6 + g_2^3s_6 - 1024s_4^3 + 4g_2^2s_4^2. \end{aligned}$$

Jede Modulform $f \in R[\Gamma_K]$ gestattet daher eine eindeutige Darstellung in der Form

$$f = f_1 \cdot p_1(g_2, s_4, s_6) + f_2 \cdot s_2 \cdot p_2(g_2, s_4, s_6),$$

wobei p_1, p_2 geeignete isobare Polynome in g_2, s_4, s_6 und f_1, f_2 geeignete Teilprodukte von $1 \cdot s_3 \cdot \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_6$ sind.

- (b) Als Spezialfall besitzt der graduierte Unterring der Modulformen zum trivialen Multiplikatorsystem die Darstellung

$$R(\Gamma_K) = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_5, s_6, s_9]$$

mit $s_5 := s_2 \hat{s}_3 \in (\Gamma_K, 5)_0^-$ und $s_9 = s_3 \hat{s}_6 \in (\Gamma_K, 9)_0^+$, wobei s_5 und s_9 jeweils einer sich unmittelbar aus (45) ergebenden quadratischen Relation über $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ genügen.

Das Resultat in Lemma 8, d.h. die Bestimmung von Erzeugenden von $R[\Gamma_K]$ ohne Angabe der zwischen ihnen bestehenden Relationen, findet man bereits bei Gundlach [13], Satz 1, S.119. Sein Beweis ist aber weit weniger elementar, da er auf seine Arbeit [12] zurückgreift, wo in diesem Zusammenhang u.a. der Satz von Riemann-Roch (1-dim.) und die Dimensionsformel von Shimizu [41], Theorem 11 (bewiesen mittels der Selbergschen Spurformel), also relativ tiefe Hilfsmittel, wesentlich eingehen¹. Auf völlig anderem Wege, nämlich mit Mitteln der algebraischen Geometrie, bewies Hirzebruch [22], S.316 den Struktursatz für $R(\Gamma_K)$ mit den Relationen für s_5 und s_9 , wobei allerdings infolge einer unrichtigen Identifikation der von ihm verwendeten Erzeugenden mit denen Gundlachs ein kleiner Fehler auftrat, der in einem Gespräch mit Herrn Hirzebruch geklärt werden konnte: Die richtige Identifikation der bei Hirzebruch [22], Gundlach [13] und hier auftretenden Erzeugenden von $R[\Gamma_K]$ und Kurven in H_1^2 bzw. $\overline{H_1^2/\Gamma_K}$ lautet, wobei (=) Gleichheit bis auf einen konstanten Faktor bedeute:

hier		Gundlach [13]		Hirzebruch [22], S.316
g_2	=	G_{-2}	(=)	σ_2
s_2	(=)	θ	(=)	$\sqrt{\sigma_4}$
s_3	(=)	$\tilde{H}$	(=)	$\sqrt{\sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4}$ (statt σ_3)
$\hat{s}_3$	(=)	H	(=)	σ_3 (statt $\sqrt{\sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4}$)
$\hat{s}_6$	(=)	G	(=)	Δ
$\mathcal{D}$	=	$\mathfrak{A}_1$	$\hat{=}$	F_1
$\mathcal{E}$	=	$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} < \mathfrak{A}_{\varepsilon\sqrt{2}} >$	$\hat{=}$	F_2 (F_1, F_2 Kurven in $\overline{H_1^2/\Gamma_K}$)

¹ Auch gegenüber [35] wurde hier wesentlich vereinfacht, denn in [35] geht entscheidend die von Igusa bestimmte Relation für die Spitzenform χ_{35} zu Γ_2 ([28], S.849) und damit die Invariantentheorie ein (siehe nächsten Abschnitt).

d.h. bei Hirzebruch sind σ_3 und $\sqrt{\sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4}$ jeweils zu vertauschen, genauer: Auf S.315 in (21) und auf S.316 Mitte muß es jeweils

$$c^2 = \sigma_4 \sigma_3^2 = C + 4\sigma_2 \sigma_4^2 \quad \text{statt} \quad c^2 = \sigma_4 (\sigma_3^2 - 4\sigma_2 \sigma_4) = C$$

heißen. Ansonsten ist auf S.316 überall σ_3 durch $\sqrt{\sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4}$ zu ersetzen, ausgenommen *innerhalb* der eckigen Klammer in der Diskriminantenformel (22), wo σ_3^2 stehen bleibt. Entsprechend ist Hirzebruch [23], S.77 für den Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ zu berichtigen.

Schließlich sei noch auf die über Gundlachs und Hirzebruchs Resultate hinausgehende Aussage hingewiesen, daß sich alle Erzeugenden von $R[\Gamma_K]$ durch Thetanullwerte darstellen lassen, womit im Falle der Hilbertschen Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ die völlige Analogie zu den entsprechenden Aussagen im Siegelschen Fall für $n = 1$ (klassisch) und $n = 2$ (Igusa [26],[28]) hergestellt ist. Bei Gundlach ist nur θ ein Thetaausdruck (das Produkt der 4 ersten Thetanullwerte) während $\tilde{H}$, H und G aus Eisensteinreihen vom Gewicht 1 zu Hauptkongruenzuntergruppen von Γ_K aufgebaut sind.

Nachfolgend sind nochmals tabellarisch die Anfangsfourierkoeffizienten der Erzeugenden von $R(\Gamma_K)$ und $R[\Gamma_K]$ zusammengestellt, wobei der Vollständigkeit halber auch bisher nicht benötigte Werte mitaufgenommen wurden.

$v = [m, n]$	[0,0]	[2,1]	[0,1]	[4,2]	[2,2]	[0,2]	[6,3]	
$a(s_2, v)$	0	1	0	0	0	0	-2	} zu nichttrivialen Multiplikator- systemen
$a(s_3, v)$	0	0	1	0	0	0	0	
$a(\hat{s}_3, v)$	0	1	0	0	0	0	18	
$a(\hat{s}_6, v)$	0	0	1	0	0	0	0	
$a(g_2, v)$	1	48	144	336	384	720	480	} zum trivialen Multiplikator- system
$a(s_4, v)$	0	1	-2	-4	-8	24	26	
$a(s_5, v)$	0	1	0	16	-56	0	-42	
$a(s_6, v)$	0	0	1	-2	-16	12	32	
$a(s_9, v)$	0	0	1	0	-96	-336	0	

3.2. Beweis des Struktursatzes für $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ mittels der Igusa-Relation für χ_{35}

In diesem Abschnitt wird einer von Resnikoff [37] stammenden und von ihm im Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ erfolgreich zur Strukturbestimmung von $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ verwendeten Idee folgend ¹ gezeigt, wie man auch noch auf andere Weise die quadratische Relation, der s_9 bzw. $\hat{s}_6$ über $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$) genügt, und zugleich die Existenz von s_9 erhalten kann; nämlich indem man die von Igusa bestimmte quadratische Relation, der die Siegelsche Spitzenform zweiten Grades χ_{35} vom Gewicht 35 über $R^{(2)}(\Gamma_2)$ genügt ([28], S. 849), mittels der modularen Einbettung ψ von $R^{(2)}(\Gamma_2)$ nach $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ hinüberliftet und auswertet. Die Durchführung der Rechnungen, wenngleich genauso elementar wie im Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, erweist sich jedoch für $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ als weit mühsamer und aufwendiger: Der Rechenaufwand steigt etwa um den Faktor 10 an. Im übrigen erhält man auf diese Weise auch nicht den vollständigen Struktursatz wie im Falle $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, sondern nur den Struktursatz für den Ring $R(\Gamma_K)^+$ der symmetrischen Modulformen beliebigen Gewichts mit trivialem Multiplikatorsystem zu Γ_K . Aber wegen des prinzipiellen Interesses an dieser Methode, die die Bedeutung der modularen Einbettung ψ unterstreicht, wird der Beweis, eine gekürzte, aber inhaltlich vollständige Fassung des bereits in [35], S.119 ff. gebrachten Beweises, hier ausgeführt.

Im folgenden ist ausschließlich von Modulformen zum trivialen Multiplikatorsystem die Rede, auch ohne daß dies jedesmal eigens erwähnt wird. Zunächst sind einige Vorbereitungen zu treffen. Nach Igusa [25], S.194,195 wird $R^{(2)}(\Gamma_2)$ von den Eisensteinreihen φ_4, φ_6 der Gewichte 4 und 6 und den Spitzenformen χ_{10}, χ_{12} der Gewichte 10 und 12 erzeugt. Den graduierten Ring $R(\Gamma_2)$ der Siegelschen Modulformen zweiten Grades beliebigen Gewichts erhält man gemäß Igusa [26], S.404 bzw. [28], S.847-849 durch Hinzunahme von χ_{35} :

$$R(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}] ,$$

wobei sich alle 5 Erzeugenden durch die 10 Thetanullwerte zweiten Grades darstellen lassen. Ihre Anfangsfourierkoeffizienten, soweit im folgenden benötigt, lauten, wenn man die von Igusa gewählte Normierung zugrunde legt (vgl. Igusa [25], S.190; Resnikoff, Saldaña [38], S.108; Maaß [34], S.174) ²:

¹ vgl. auch [35], § 5, S.98 ff.

² oder siehe [35], S.15 und S. 23.

$$\begin{aligned}
 & a(\varphi_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1, \quad a(\varphi_4, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 240 \\
 & a(\varphi_6, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1, \quad a(\varphi_6, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = -504 \\
 (46) \quad & a(\chi_{10}, \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad a(\chi_{10}, \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}) = -\frac{1}{4}, \quad a(\chi_{10}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \\
 & a(\chi_{12}, \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad a(\chi_{12}, \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{12}, \quad a(\chi_{12}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \frac{5}{6} \\
 & a(\chi_{35}, \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}) = \frac{1}{4i}, \quad a(\chi_{35}, T) = 0 \quad \text{für alle semipositiven halbganzen } T \\
 & \quad \text{mit } \sigma(T) \leq 5, \text{ die nicht unimodular} \\
 & \quad \text{äquivalent zu } \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \text{ sind.}
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man unter Verwendung von Lemma 3(b), S.15 durch Anwenden der modularen Einbettung ψ

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 v = [m, n] & [0, 0] & [2, 1] & [0, 1] & [4, 2] & [2, 2] & [0, 2] & [6, 3] \\
 \hline
 a(\varphi_4 \psi, v) & 1 & 240 & 0 & * & * & * & * \\
 (47) \quad a(\varphi_6 \psi, v) & 1 & -504 & 0 & * & * & * & * \\
 a(\chi_{10} \psi, v) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & * \\
 a(\chi_{12} \psi, v) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6}
 \end{array}$$

sowie

$$(48) \quad a(\chi_{35} \psi, [m, n]) = \begin{cases} \frac{1}{4i} & \text{für } n = 5, m = \pm 4 \\ -\frac{1}{2i} & \text{für } n = 5, m = 0 \\ 0 & \text{für } n \leq 5, m \text{ sonst.} \end{cases}$$

$\varphi_4 \psi$, $\varphi_6 \psi$, $\chi_{10} \psi$ und $\chi_{12} \psi$ sind nach Lemma 3 symmetrische Hilbertsche Modulformen geraden Gewichts zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$, also nach Satz 2, S.30 darstellbar als isobare Polynome in g_2 , s_4 , s_6 . Fourierkoeffizientenvergleich anhand von (47) unter Verwendung von (42), S.34 sowie von $a(g_2, [2, 1]) = 2^4 \cdot 3$, $a(g_2, [0, 1]) = 2^4 \cdot 3^2$ (vgl. (15), S.14) ergibt

$$\begin{aligned}
 \varphi_4 \psi &= g_2^2 + 2^4 \cdot 3^2 s_4 \\
 \varphi_6 \psi &= g_2^3 - 2^3 \cdot 3^4 g_2 s_4 - 2^6 \cdot 3^3 s_6 \\
 (49) \quad \chi_{10} \psi &= -2^{-2} s_4 s_6 \\
 \chi_{12} \psi &= s_6^2 + 2^{-2} \cdot 3^{-1} g_2 s_4 s_6 + s_4^3.
 \end{aligned}$$

χ_{35} genügt einer quadratischen Relation über $R^{(2)}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$, die Igusa wie folgt bestimmt hat ([28], S.849):

$$\begin{aligned}
 \chi_{35}^2 = & 2^{-12} \cdot 3^{-9} \chi_{10} \cdot (2^{24} \cdot 3^{15} \chi_{12}^5 - 2^{13} \cdot 3^9 \varphi_4^3 \chi_{12}^4 - 2^{13} \cdot 3^9 \varphi_6^2 \chi_{12}^4 + 3^3 \varphi_4^6 \chi_{12}^3 \\
 & - 2 \cdot 3^3 \varphi_4^3 \varphi_6^2 \chi_{12}^3 - 2^{14} \cdot 3^8 \varphi_4^2 \varphi_6^2 \chi_{10} \chi_{12}^3 - 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \varphi_4^2 \chi_{10}^2 \chi_{12}^3 + 3^3 \varphi_4^4 \chi_{10}^3 \\
 & + 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 37 \varphi_4^4 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 + 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \varphi_4^2 \varphi_6^2 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 - 2^{23} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \varphi_4^3 \chi_{10}^3 \chi_{12}^2 \\
 (50) \quad & - 3^2 \varphi_4^7 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 + 2 \cdot 3^2 \varphi_4^4 \varphi_6^2 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 + 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 19 \varphi_4^3 \varphi_6^3 \chi_{10}^3 \chi_{12}^2 \\
 & + 2^{20} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 11 \varphi_4^2 \chi_{10}^4 \chi_{12}^2 - 3^2 \varphi_4^4 \varphi_6^4 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 + 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \varphi_4^3 \varphi_6^3 \chi_{10}^3 \chi_{12}^2 \\
 & - 2 \varphi_4^6 \varphi_6^3 \chi_{10}^3 - 2^{12} \cdot 3^4 \varphi_4^5 \chi_{10}^4 + 2^2 \varphi_4^3 \varphi_6^3 \chi_{10}^3 + 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \varphi_4^2 \varphi_6^2 \chi_{10}^4 \\
 & + 2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \varphi_4 \varphi_6^4 \chi_{10}^5 - 2 \varphi_6^5 \chi_{10}^3 + 2^{32} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \chi_{10}^6) .
 \end{aligned}$$

Man beachte, daß im folgenden nur von der Existenz von χ_{35} und dieser Relation Gebrauch gemacht wird, daß es dagegen ohne Belang ist, daß $R^{(2)}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$ und $R(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\varphi_4, \varphi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}]$ gilt.

Nun zum eigentlichen Beweis des Struktursatzes für $R(\Gamma_K)^+$. Da die symmetrischen Modulformen geraden Gewichts zu Γ_K nach Satz 2, S.30 bekannt sind, sind nur noch die ungeraden Gewichts zu bestimmen. Indem man ähnlich wie beim Beweis von Lemma 8, S.33 vorgeht¹, zeigt man unter Verwendung von Lemma 2(a), S.12 und Lemma 4, S.16 zunächst, daß eine auf der Diagonalen $\mathcal{D}$ nicht identisch verschwindende symmetrische Modulform ungeraden Gewichts mindestens das Gewicht 9 haben muß, und daß, falls eine nichttriviale symmetrische Modulform s_9 vom Gewicht 9 existiert - es gilt dann automatisch $s_9|_{\mathcal{D}} \neq 0$ -, diese jede andere symmetrische Modulform ungeraden Gewichts teilt. Da der Quotient wieder eine symmetrische Modulform geraden Gewichts ist, ist also nur noch die Existenz von s_9 zu beweisen und die quadratische Relation, der s_9 über $R^{(2)}(\Gamma_K)^+$ genügen muß, zu ermitteln. Dies geschieht mittels der Igusa-Relation (50) für χ_{35} .

Die Funktion $\chi_{35}\psi$ ist nach Lemma 3, S.15 eine symmetrische Modulform zu Γ_K vom Gewicht 35 (ungerade!), müßte also, wenn eine nichttriviale Modulform $s_9 \in (\Gamma_K, 9)^+$ existiert, durch diese teilbar sein, und der Quotient wäre eine Modulform aus $(\Gamma_K, 26)^+$:

$$(51) \quad \chi_{35}\psi = s_9 \cdot p_{26}(g_2, s_4, s_6) ,$$

wobei p_{26} ein isobares Polynom in g_2, s_4, s_6 vom Gewicht 26 ist. Der Index

¹ vgl. [35], S.119 ff.

bei einem Polynom p deute im folgenden stets dessen Gewicht an. Wendet man nun auf die Relation (50) die modulare Einbettung ψ an, so steht links $(\chi_{35}\psi)^2$ und rechts ein Polynom in $\varphi_4\psi$, $\varphi_6\psi$, $\chi_{10}\psi$, $\chi_{12}\psi$, das nach Einsetzen der in (49) hierfür gegebenen Ausdrücke zu einem isobaren Polynom in g_2 , s_4 , s_6 vom Gewicht 70 wird, von dem noch gezeigt wird, daß es durch das Quadrat eines isobaren Polynoms $p_{26}(g_2, s_4, s_6)$ teilbar ist. Der Quotient, ein nichttriviales isobares Polynom in g_2 , s_4 , s_6 vom Gewicht 18, ist dann notwendig das Quadrat einer nichttrivialen Modulform aus $(\Gamma_K, 9)$, die wegen (51) symmetrisch sein muß, womit die Existenz von s_9 gezeigt und zugleich die quadratische Relation, der s_9 über $R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ genügt, bestimmt ist.

Man wende nun also auf die Relation (50) die modulare Einbettung ψ an, setze rechts die in (49) gegebenen Ausdrücke für $\varphi_4\psi$, $\varphi_6\psi$, $\chi_{10}\psi$, $\chi_{12}\psi$ ein und ordne die rechte Seite neu nach Potenzen von s_6 , s_4 , g_2 . Nach dieser recht langwierigen und sehr mühsamen, aber völlig elementaren Rechnung steht da:

$$\begin{aligned}
 (\chi_{35}\psi)^2 &= s_4^2 \cdot p_{62}(g_2, s_4, s_6) \quad \text{mit} \\
 p_{62}(g_2, s_4, s_6) &= 2^{18} \cdot 3^3 s_4^2 s_6^9 - 2^{13} \cdot 3^3 g_2^2 s_4 s_6^9 + 2^6 \cdot 3^3 g_2^4 s_6^9 + 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 g_2^3 s_4^3 s_6^8 \\
 &\quad - 2^8 \cdot 619 g_2^3 s_4^2 s_6^8 + 2^8 \cdot 5 g_2^5 s_4 s_6^8 - g_2^7 s_6^8 - 2^{13} \cdot 5^2 \cdot 67 s_4^5 s_6^7 \\
 &\quad + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 293 g_2^2 s_4^4 s_6^7 - 2^7 \cdot 3 \cdot 107 g_2^4 s_4^3 s_6^7 + 2^2 \cdot 79 g_2^6 s_4^2 s_6^7 \\
 &\quad - 2^{-1} g_2^8 s_4 s_6^7 - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 37 g_2^6 s_4 s_6^6 + 2^7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 59 g_2^3 s_4^5 s_6^6 \\
 &\quad - 2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 29 g_2^5 s_4^4 s_6^6 + 2^2 \cdot 7 g_2^7 s_4^3 s_6^6 - 2^{-4} g_2^9 s_4^2 s_6^6 + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 139 s_4^8 s_6^5 \\
 &\quad - 2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 599 g_2^2 s_4^7 s_6^5 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1259 g_2^4 s_4^6 s_6^5 - 631 g_2^6 s_4^5 s_6^5 \\
 (52) \quad &\quad + g_2^8 s_4^4 s_6^5 + 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 37 g_2^9 s_4^4 s_6^4 - 47 \cdot 5711 g_2^3 s_4^8 s_6^4 + 2^2 \cdot 1619 g_2^5 s_4^7 s_6^4 \\
 &\quad - 2^{-3} \cdot 419 g_2^7 s_4^6 s_6^4 + 2^{-3} g_2^9 s_4^5 s_6^4 + 2^{10} \cdot 3^8 s_4^{11} s_6^3 + 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 13 g_2^2 s_4^{10} s_6^3 \\
 &\quad - 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 59 g_2^4 s_4^9 s_6^3 + 2^{-2} \cdot 7 \cdot 11^2 g_2^6 s_4^8 s_6^3 - 2^{-2} g_2^8 s_4^7 s_6^3 \\
 &\quad + 2^9 \cdot 3^8 g_2^2 s_4^{12} s_6^2 + 2^4 \cdot 3^4 g_2^3 s_4^{11} s_6^2 - 2^{-4} \cdot 3 \cdot 11483 g_2^5 s_4^{10} s_6^2 \\
 &\quad + 2^{-3} \cdot 3 \cdot 67 g_2^7 s_4^9 s_6^2 - 2^{-4} g_2^9 s_4^8 s_6^2 + 2^6 \cdot 3^8 g_2^2 s_4^{13} s_6 \\
 &\quad - 2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 593 g_2^4 s_4^{12} s_6 + 2^{-1} \cdot 11 \cdot 19 g_2^6 s_4^{11} s_6 - 2^{-2} g_2^8 s_4^{10} s_6.
 \end{aligned}$$

Man versuche nun, von p_{62} einen quadratischen Faktor $p_{22}(g_2, s_4, s_6)^2$ abzuspalten, so daß man

$$(\chi_{35}\psi)^2 = s_4^2 \cdot p_{22}(g_2, s_4, s_6)^2 p_{18}(g_2, s_4, s_6)$$

hat, wobei $p_{18}(g_2, s_4, s_6)$ dann das Quadrat einer nichttrivialen Modulform $s_9 \in (\Gamma_K, 9)^+$ sein muß, die o.B.d.A. normiert mit

$$(53) \quad a(s_9, [0, 1]) = 1, \quad a(s_9, [\pm 2n, n]) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ (vgl. Lemma 2(a), S.12)}$$

angenommen werden kann. Setzt man nun p_{18} und p_{22} als isobare Polynome in g_2, s_4, s_6 mit unbestimmten Koeffizienten an, so folgt aus $\chi_{35}\psi = s_4 s_9 \cdot p_{22}(g_2, s_4, s_6)$ unter Beachtung von (42), S.34, (48), S.39 und (53) durch sukzessives Betrachten der Fourierkoeffizienten zu $[m, n] = [2, 2], [4, 3], [2, 3], [6, 4], [4, 4], [2, 4], [8, 5], [6, 5]$ und $[4, 5], [2, 5]$ für p_{22} , daß bereits einige mögliche Summanden wegfallen und nur übrig bleibt:

$$\begin{aligned} p_{22}(g_2, s_4, s_6) = & a_1 s_4 s_6^3 - i g_2^2 s_6^3 + a_3 g_2^2 s_4^2 s_6^2 - \frac{i}{4} g_2^3 s_4^2 s_6^2 \\ & + a_6 s_4^4 s_6 + a_7 g_2^2 s_4^3 s_6 + a_{11} g_2^5 s_4 + a_{12} g_2^3 s_4^3 \end{aligned}$$

mit den noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_1, a_3, a_6, a_7, a_{11}, a_{12} \in \mathbb{C}$. Für $p_{18} = s_9^2$ folgt aus (42), S.34 und (53) entsprechend (betrachte nacheinander die Fourierkoeffizienten zu $[m, n]$ mit $n \leq 2$ sowie zu $[6, 3], [4, 3], [8, 4]$):

$$p_{18}(g_2, s_4, s_6) = b_1 s_6^3 + b_2 g_2 s_4 s_6^2 + g_2^3 s_6^2 + b_4 s_4^3 s_6 + 4 g_2^2 s_4^2 s_6$$

mit den noch zu bestimmenden Koeffizienten $b_1, b_2, b_4 \in \mathbb{C}$ in Übereinstimmung mit (43), S.34, wenn man dort mit s_6 durchmultipliziert. Multipliziert man nun p_{18} mit p_{22}^2 , ordnet neu nach Potenzen von s_6, s_4, g_2 und macht Koeffizientenvergleich mit p_{62} in (52) ($p_{18} \cdot p_{22}^2 = p_{62} !$), so erhält man

$$\begin{array}{lll} a_1 = 64i & a_7 = \frac{3}{2}i & b_1 = -1728 \\ a_3 = 18i & a_{11} = -\frac{81}{4}i & b_2 = -288 \\ a_6 = -81i & a_{12} = \frac{1}{4}i & b_4 = -1024 . \end{array}$$

Damit ist gezeigt:

SATZ 3'. (a) Es existiert eine nichttriviale symmetrische normierte Spitzenform $s_9 \in (\Gamma_K, 9)_0^+$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$), die auf der Diagonalen $\mathcal{D}$ nicht identisch verschwindet und über $R^{(2)}(\Gamma_K) = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ der quadratischen Relation

$$s_9^2 = -1728s_6^3 - 288g_2s_4s_6^2 + g_2^3s_6^2 - 1024s_4^3s_6 + 4g_2^2s_4^2s_6$$

genügt.

(b) Der graduierte Ring der symmetrischen Hilbertschen Modulformen zu $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ mit trivialem Multiplikatorsystem besitzt die Darstellung

$$R(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6, s_9] .$$

Jede Modulform $f \in R(\Gamma_K)^+$ läßt sich eindeutig in der Form

$$f = p(g_2, s_4, s_6) + s_9 \tilde{p}(g_2, s_4, s_6)$$

darstellen, wobei $p, \tilde{p}$ geeignete isobare Polynome in g_2, s_4, s_6 sind.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_{35} \psi = \frac{1}{4} i s_4 s_9 (256 s_4 s_6^3 - 4 g_2^2 s_6^3 + 72 g_2 s_4^2 s_6^2 - g_2^3 s_4 s_6^2 \\ - 324 s_4^4 s_6 + 6 g_2^2 s_4^3 s_6 - 81 g_2 s_4^5 + g_2^3 s_4^4) . \end{aligned}$$

Um den vollständigen Struktursatz für $R[\Gamma_K]$ (oder auch nur für $R(\Gamma_K)$) zu bekommen, muß man nun wieder ähnlich wie in Abschnitt 3.1. vorgehen¹, wobei man zwar, indem man s_3 von s_9 abspaltet, ohne weiteres die Existenz von $\hat{s}_6$ samt der quadratischen Relation, der $\hat{s}_6$ genügt, erhält, die Existenz von $\hat{s}_3$ dagegen wieder direkt zeigen muß, indem man sich eine Funktion mit den Eigenschaften von $\hat{s}_3$ konstruiert, etwa wie hier mittels Thetareihen (relativ einfach) oder wie bei Gundlach [13] als Produkt von Differenzen und Summen von Eisensteinreihen vom Gewicht 1 zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma_K(2)$ von Γ_K (komplizierter). Insgesamt gesehen dürfte daher der in Abschnitt 3.1. beschrittene Weg nicht nur der elementarste, sondern auch der einfachste und vom Gesamtaufwand her gesehen kürzeste zum Beweis des vollständigen Struktursatzes für $R[\Gamma_K]$ sein. Man beachte noch, daß bei der Bestimmung der quadratischen Relation für $\hat{s}_6$ dort wesentlich die Darstellung von $\hat{s}_6$ (und g_2, s_4, s_6) durch Thetanullwerte benutzt wurde.

¹ vgl. [35], S.125 ff.

3.3. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$

Eine meromorphe Funktion $f: H_1^2 \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Hilbertsche Modulfunktion zu K (oder Modulfunktion zu Γ_K), K ein beliebiger reellquadratischer Zahlkörper, wenn sie invariant bei Γ_K ist, d.h. wenn sie die Transformationsgleichung

$$f(\mu\langle\zeta\rangle) = f(\zeta) \quad \text{für alle } \mu \in \Gamma_K, \zeta \in H_1^2$$

erfüllt. Der von den Modulfunktionen zu Γ_K gebildete Funktionenkörper werde mit $K(\Gamma_K)$, der von den symmetrischen Modulfunktionen ($f(\zeta) = f(\zeta^*)$ für alle $\zeta \in H_1^2$) gebildete Unterkörper mit $K(\Gamma_K)^+$ bezeichnet. Jede Modulfunktion $f \in K(\Gamma_K)$ (bzw. $\in K(\Gamma_K)^+$) läßt sich nach Gundlach [10], Satz 2, S.81 global als Quotient zweier (symmetrischer) Modulformen g, h gleichen Gewichts und gleichen Multiplikatorsystems darstellen:

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{mit } h \neq 0, g, h \in (\Gamma_K, k, v) \text{ (bzw. } \in (\Gamma_K, k, v)^+ \text{) geeignet.}$$

Indem man den Bruch gegebenenfalls mit einer geeigneten Potenz von h erweitert, darf man o.B.d.A. " k gerade, $v = 1$ " annehmen.

Ziel dieses Abschnitts ist es, auf konstruktivem Wege die Rationalität des Funktionenkörpers $K(\Gamma_K)$ aller Hilbertschen Modulfunktionen zu $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ zu zeigen¹. Als erstes wird die Struktur des Funktionenkörpers $K(\Gamma_K)^+$ der symmetrischen Modulfunktionen zu Γ_K bestimmt. Da jede Modulfunktion $f \in K(\Gamma_K)^+$ als Quotient zweier Modulformen aus $(\Gamma_K, k)^+$ mit $k \equiv 0(2)$ darstellbar ist, läßt sich f wegen $R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_4, s_6]$ in der Form

$$f = \frac{p(g_2, s_4, s_6)}{q(g_2, s_4, s_6)} \quad (p, q \text{ isobare Polynome vom Gewicht } k)$$

schreiben. Kürzt man durch $g_2^{k/2}$ (k gerade!), so ist f ein rationaler Ausdruck in

$$(54) \quad g_2^{n_1} s_4^{n_2} s_6^{n_3} = \left(\frac{g_2^2}{s_4} \right)^{-n_2 - n_3} \cdot \left(\frac{g_2 s_4}{s_6} \right)^{-n_3} \quad (n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}; 2n_1 + 4n_2 + 6n_3 = 0)$$

mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$, wobei die hier gewählte Art der Aufspaltung in 2 Faktoren erst später ersichtliche Gründe hat. Mit g_2, s_4, s_6 sind auch $\frac{g_2^2}{s_4}, \frac{g_2 s_4}{s_6}$ algebraisch unabhängig und man erhält (vgl. Gundlach [13], S.119):

¹ Damit wird ein in [35] noch offen gebliebenes Problem gelöst.

SATZ 4. Die symmetrischen Modulformen zu $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}$ bilden einen rationalen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+ = \mathbb{C}(x, y) \quad \text{mit } x := \frac{g_2 s_4}{s_6}, \quad y := \frac{g_2^2}{s_4}$$

als einer möglichen Transzendenzbasis.

Bemerkung: Da $K(\Gamma_K)$ und $K(\Gamma_K)^+$ für beliebige reellquadratische Zahlkörper K bekanntlich den Transzendenzgrad 2 haben ([32], Satz 9, S. 573 zusammen mit [10], Satz 2, S. 81), würde auch daraus die algebraische Unabhängigkeit von x, y folgen; dieses etwas tieferliegende Resultat wurde hier jedoch nicht benötigt.

Hinsichtlich des Körpers aller Modulfunktionen zu $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}$ kann man zunächst folgenden leicht verifizierbaren Satz formulieren:

SATZ 5. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ ist ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$. Er ist eine quadratische Erweiterung von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ mit

$$z := \frac{g_2 s_5 s_9}{s_4 s_6} = \frac{g_2 \hat{s}_3 \hat{s}_6}{s_2 s_3} \quad (\text{schiefssymmetrisch})$$

als primitivem Element dieser Erweiterung:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}) = \mathbb{C}(x, y, z) \quad (x, y \text{ wie in Satz 4}).$$

Aus (45) in Satz 3, S.35 folgt, daß z der folgenden reinquadratischen Gleichung über $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+ = \mathbb{C}(x, y)$ genügt:

$$(55) \quad z^2 = (x+4)(xy^2 + (4x^2 - 288x - 1728)y - 1024x^2) .$$

Es ist bekannt, daß $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ in Wahrheit ein rationaler Funktionenkörper ist (Hammond [15], Theorem 6.3., S.43). Kurz zuvor zeigte Freitag ([4], Folg. zu Satz 4, S.12) eine entsprechende Aussage für den Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Etwa gleichzeitig mit Hammond bewies Hirzebruch ([20], Theorem S. 260) für insgesamt 10 Diskriminanten (u.a. für $D = 5, 8$) die Rationalität der zugehörigen Funktionenkörper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})})$. Daß es keine weiteren Fälle gibt, in denen $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})})$ rational ist, wurde 4 Jahre später in [24] gezeigt. Freitag, Hammond und Hirzebruch arbeiteten mit Methoden der algebraischen

Geometrie; keines ihrer Resultate ist konstruktiv in dem Sinne, daß man daraus konkret 2 Erzeugende für $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})})$ ableiten könnte. Der folgende konstruktive, überraschend kurze und einfache Rationalitätsbeweis für $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ (für $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ im nächsten Paragraphen), in dessen Verlauf 2 Erzeugende von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ explizit bestimmt werden, ist daher vielleicht von Interesse. Ein hinreichendes Kriterium dafür, wann ein algebraischer Funktionenkörper, der eine quadratische Erweiterung eines rationalen Funktionenkörpers ist, in Wahrheit selbst rational ist, gibt das folgende, mit einer geringfügigen Veränderung aus Gröbner [8], S. 101,102 übernommene, unmittelbar zu verifizierende Lemma.

LEMMA 9. Sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$, $K(y)$ eine einfach transzendente Erweiterung von K und $K(y,z)$ eine quadratische Erweiterung von $K(y)$, wobei z einer Gleichung der Form

$$z^2 = ay^2 + 2by + c \quad \text{mit } a, b, c \in K, a \neq 0$$

genüge. Wenn es dann ein $\alpha \in K$ gibt, so daß $\beta := \sqrt{a\alpha^2 + 2b\alpha + c} \in K$ ist, so ist $K(y,z)$ rational, denn dann gilt

$$K(y,z) = K(t) \quad \text{mit } t := \frac{\beta + z}{y - \alpha} \quad (\Rightarrow K(t) \subset K(y,z))$$

und den Umkehrformeln

$$y = \frac{\alpha t^2 + 2\beta t + 2b + a\alpha}{t^2 - a}, \quad z = \frac{\beta t^2 + 2(b + a\alpha)t + a\beta}{t^2 - a} \quad (\Rightarrow K(y,z) \subset K(t)).$$

Da die Gleichung (55) in Satz 5 genau die in Lemma 9 erforderliche Form hat:

$$z^2 = a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) \quad \text{mit } a(x), b(x), c(x) \in K := \mathbb{C}(x), a(x) \neq 0,$$

versucht man zunächst, ein $\alpha(x) \in \mathbb{C}(x)$ zu finden, für das $a(x)\alpha(x)^2 + 2b(x)\alpha(x) + c(x)$ ein Quadrat $\beta(x)^2$ in $\mathbb{C}(x)$ wird, um Lemma 9 anwenden zu können. Der (sinnvolle) lineare Ansatz $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ ($\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$) erweist sich jedoch nicht als brauchbar, da er zur Bestimmung der Koeffizienten α_0, α_1 auf Gleichungen höheren als vierten Grades führt. Daher versucht man, die Gleichung (55) in eine geeignetere Form zu bringen, wofür sich die Substitution $x \mapsto s = x + 4$ anbietet, durch die (55) in

$$z^2 = \underbrace{(s^2 - 4s)y^2}_{=: a(s)} + \underbrace{(4s^3 - 320s^2 - 512s)y}_{=: 2b(s)} + \underbrace{(-2^{10}s^3 + 2^{13}s^2 - 2^{14}s)}_{=: c(s)}$$

übergeht. Die Forderung

$$a(s)\alpha(s)^2 + 2b(s)\alpha(s) + c(s) \stackrel{!}{=} \beta(s)^2 \quad \text{mit } \beta(s) \in K := \mathbb{C}(s) (= \mathbb{C}(x)!))$$

führt für den linearen Ansatz $\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s$ ($\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$) hier nun auf eine quadratische Gleichung in α_0 und eine Gleichung 4. Grades in α_1 mit

$$\alpha_0 = -64 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = -200$$

als einzig möglichen Lösungen des Problems, d.h. man kann Lemma 9 mit

$$\alpha(s) = -200s - 64 \quad \text{und} \quad \beta(s) = 140\sqrt{2}s^2 - 128\sqrt{2}s$$

anwenden und erhält unmittelbar

SATZ 6. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ ist ein rationaler Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})}) = \mathbb{C}(s, t),$$

wobei eine mögliche Transzendenzbasis s, t lautet (x, y, z wie in Satz 4,5):

$$\begin{aligned} s &:= x + 4 = -\frac{2s_4 + 4s_6}{s_6} \\ t &:= \frac{140\sqrt{2}x^2 + 992\sqrt{2}x + 1728\sqrt{2} + z}{y + 200x + 864} \\ &= \frac{140\sqrt{2}g_2^2s_4^3 + 992\sqrt{2}g_2s_4^2s_6 + 1728\sqrt{2}s_4s_6^2 + g_2s_5s_9}{g_2^2s_6^2 + 200g_2s_4^2s_6 + 864s_4s_6^2}. \end{aligned}$$

s und t lassen sich beide explizit durch Thetanullwerte darstellen.

Die Möglichkeit, Lemma 9 anwenden zu können, beruhte entscheidend darauf, daß in Gleichung (55) in Satz 5 y nur von einem Grad ≤ 2 auftrat und auch x nur von möglichst niedrigem Grade vorkam, was durch eine geeignete Aufspaltung in (54), S.44, d.h. durch eine geeignete Wahl der Transzendenzbasis x, y von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ zusammen mit einer geeigneten Wahl von z erreicht werden konnte¹.

¹ Mit der in [35], S.134,135 verwendeten Transzendenzbasis $x = \frac{s_4}{g_2^2}$, $y = \frac{s_6}{g_2^3}$ von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})^+$ und von $z = (s_5s_9/g_2^7)$ wäre der Versuch, auf direktem Wege (wie hier) die Rationalität von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{8})})$ zeigen zu wollen, ein aussichtsloses Unterfangen gewesen.

§ 4 HILBERTSCHE MODULFORMEN UND MODULFUNKTIONEN ZU $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

Der vollständige Struktursatz für $R[\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}] = R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ ($\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ besitzt nur das triviale Multiplikatorsystem!) lautet:

SATZ 7. Der graduierte Ring der Hilbertschen Modulformen zu $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ besitzt die Darstellung

$$R[\Gamma_K] = R(\Gamma_K) = \mathbb{C}[g_2, s_5, s_6, s_{15}]$$

mit den aus Abschnitt 2.2. bekannten normierten Modulformen

$$g_2 \in (\Gamma_K, 2)^+, s_5 \in (\Gamma_K, 5)_0^-, s_6 \in (\Gamma_K, 6)_0^+, s_{15} \in (\Gamma_K, 15)_0^+,$$

die ein minimales Erzeugendensystem von $R(\Gamma_K)$ bilden. Sie sind alle durch die 10 Thetanullwerte θ_i , $i = 0, 1, \dots, 9$, darstellbar. Die Spitzenformen s_5 und s_{15} genügen über dem Polynomring

$$R^{(2)}(\Gamma_K)^+ = \mathbb{C}[g_2, s_6, s_{10}]$$

den quadratischen Relationen

$$(56) \quad \begin{aligned} s_5^2 &= s_{10} \quad (\text{Def.}) \\ s_{15}^2 &= 5^5 s_{10}^3 - 2^{-1} \cdot 5^3 g_2^2 s_6^2 s_{10}^2 + 2^{-4} g_2^5 s_{10}^2 + 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^2 g_2^3 s_6^3 s_{10} \\ &\quad - 2^{-3} g_2^4 s_6^2 s_{10} - 2 \cdot 3^3 s_6^5 + 2^{-4} g_2^3 s_6^4. \end{aligned}$$

Inhaltlich neu gegenüber den bisherigen Fassungen des Struktursatzes für $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ bei Gundlach [11] (ohne Bestimmung der Relation für s_{15}), bei Resnikoff [37] ¹(Bestimmung der Relation für s_{15} mittels modularer Einbettung und Igusa-Relation für χ_{35}) ² und bei Hirzebruch [21], [22] (2 verschiedene Beweise, jeweils mit Methoden der algebraischen Geometrie) ist hier lediglich die Aussage, daß sich alle Erzeugenden von $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ durch Thetanullwerte darstellen lassen, womit auch im Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ die völlige Analogie zu den entsprechenden Aussagen im Siegelschen Fall für $n = 1, 2$

¹ In [37], S. 165, 12. Zeile von unten, muß es richtig ($= 2^{-6} \theta \dots$) statt ($= \theta \dots$) heißen; auf S. 169 muß auf der rechten Seite von Gleichung (16) im Hinblick auf Theorem 2 der Faktor $(-i/2)$ ergänzt werden; die Ausführungen zum Beweis des (richtigen) Theorems 2 sind unverständlich bzw. falsch.

² vgl. [35], § 5, S. 98 ff.

hergestellt ist. Außerdem wird nun gezeigt, daß man die quadratische Relation für s_{15} auch ohne Anleihen aus der Invariantentheorie (Igusa-Relation) oder algebraischen Geometrie auf völlig elementarem Wege allein durch Fourierkoeffizientenvergleich (also noch einfacher als im Falle $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$) bestimmen kann, wenn man nur die Existenz einer nichttrivialen Modulform $s_{15} \in (\Gamma_K, 15)^+$ voraussetzt. Die Existenz von s_{15} wurde hier in (30), S.26 auf direktem Wege durch Konstruktion von s_{15} mittels Thetareihen nachgewiesen.

Wegen $s_{15}^2 \in (\Gamma_K, 30)^+$ ist s_{15}^2 nach Satz 1, S.19 ein isobares Polynom in g_2, s_6, s_{10} vom Gewicht 30:

$$(57) \quad s_{15}^2 = b_1 s_{10}^3 + b_2 g_2^2 s_6^2 s_{10}^2 + b_3 g_2^5 s_{10}^2 + b_4 g_2^3 s_6^3 s_{10} + b_5 g_2^4 s_6^2 s_{10} + b_6 g_2^7 s_6 s_{10} + b_7 g_2^{10} s_{10} + b_8 s_6^5 + b_9 g_2^3 s_6^4 + b_{10} g_2^6 s_6^3 + b_{11} g_2^9 s_6^2 + b_{12} g_2^{12} s_6 + b_{13} g_2^{15}.$$

Aus den in (30), S.26 angegebenen Anfangsfourierkoeffizienten von s_{15} erhält man

$$(58) \quad a(s_{15}^2, [m, n]) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 4, m = 0 \\ 0 & \text{für } n \leq 4, m \text{ sonst} \\ -2 & \text{für } n = 5, m = 5 \\ 0 & \text{für } n = 5, m = 3 \\ -550 & \text{für } n = 5, m = 1 \\ 1100 & \text{für } n = 6, m = 6 \end{cases}.$$

Weiter hat man für g_2, s_6, s_{10} die Fourierkoeffiziententabelle

$v = [m, n]$	[0,0]	[1,1]	[2,2]	[0,2]	[3,3]	[1,3]	[4,4]
$a(g_2, v)$	1	120	600	<i>720</i>	<i>1200</i>	<i>1440</i>	<i>2520</i>
$a(s_6, v)$	0	1	20	-90	90	252	-624
$a(s_{10}, v)$	0	0	1	-2	-18	20	340

Die kursiv gesetzten Werte werden im folgenden nicht benötigt; sie wurden nur der Vollständigkeit halber aufgenommen. Die Werte für g_2 wurden (14), S.14, die fettgedruckten Werte für s_6 und s_{10} (20), (21), S.19 entnommen und die restlichen Werte für s_6, s_{10} aufgrund deren Darstellungen durch die Eisensteinreihen g_2, g_6, g_{10} in (20), (22), S.19 anhand von (14), S.14 errechnet.

Fourierkoeffizientenvergleich in (57) sukzessiv für $[m, n] = [0, 0], [1, 1], [2, 2], [0, 2], [3, 3], [1, 3]$ unter Verwendung von (58) und der fettgedruckten

Werte von (59) ergibt $b_i = 0$ für $i = 13, 12, 11, 7, 10, 6$. Unter erneuter Verwendung von (58) und (59) (ohne kursive Werte) erhält man die Tabelle

$v = [m, n]$	$[4, 4]$	$[2, 4]$	$[0, 4]$	$[5, 5]$	$[3, 5]$	$[1, 5]$	$[6, 6]$
$a(g_2^5 s_{10}^2, v)$	1	-4	6	572	-1692	1124	126246
$a(g_2^4 s_6^2 s_{10}, v)$	1	0	-2	496	240	-736	96926
$a(g_2^3 s_6^4, v)$	1	4	6	452	1692	2844	82086
$a(g_2^2 s_6^2 s_{10}^2, v)$	0	0	0	1	-3	2	224
$a(g_2 s_6^3 s_{10}, v)$	0	0	0	1	1	-2	156
$a(s_6^5, v)$	0	0	0	1	5	10	120
$a(s_{10}^3, v)$	0	0	0	0	0	0	1
$a(s_{15}^2, v)$	0	0	1	-2	0	-550	1100

woraus durch einen nochmaligen Fourierkoeffizientenvergleich sofort

$$\begin{aligned}
 b_3 &= 2^{-4}, & b_5 &= -2^{-3}, & b_9 &= 2^{-4} \\
 b_2 &= -2^{-1} \cdot 5^3, & b_4 &= 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^2, & b_8 &= -2 \cdot 3^3 \quad \text{und } b_1 = 5^5,
 \end{aligned}$$

also die in (56), Satz 7, behauptete quadratische Relation für s_{15} folgt.

Man beachte, daß die Darstellbarkeit der Erzeugenden von $R(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ durch Thetanullwerte im Gegensatz zum Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$, wo sie zur Bestimmung der quadratischen Relation für $\hat{s}_6$ wesentlich war, hier nirgends verwendet wurde. Es genügte allein die *Existenz* einer nichttrivialen Modulform $s_{15} \in (\Gamma_K, 15)^+$, die man sich statt wie hier mittels Thetanullwerten auch anders, etwa wie bei Gundlach [11], S.242 ff., als Produkt von 15 Differenzen passend gewählter Eisensteinreihen vom Gewicht 1 zu einer Hauptkongruenzuntergruppe von $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$, konstruieren kann.

Nun noch zum konstruktiven Nachweis der Rationalität des Funktionskörpers $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$, der ganz ähnlich wie im Fall $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ verläuft. Zuerst bestimmt man wieder die Struktur von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$. Indem man wie in 3.3., S. 44 vorgeht, sieht man, daß jede Modulfunktion aus $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$ ein rationaler Ausdruck in

$$g_2^{n_1} s_6^{n_2} s_{10}^{n_3} = \left(\frac{g_2^3}{s_6} \right)^{-n_2 - 2n_3} \cdot \left(\frac{s_6^2}{g_2 s_{10}} \right)^{-n_3} \quad (n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}; 2n_1 + 6n_2 + 10n_3 = 0)$$

mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ ist, wobei die Aufspaltung in 2 Faktoren wieder so gewählt ist, daß sich eine zur Erreichung des angestrebten Ziels geeignete Transzendenzbasis für $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$ ergibt. Mit g_2, s_6, s_{10} sind auch

$$\frac{g_2^3}{s_6}, \frac{s_6^2}{g_2 s_{10}} \text{ algebraisch unabhängig und man erhält (vgl. Gundlach [11],$$

Satz 6, S.241):

SATZ 8. Die symmetrischen Modulformen zu $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ bilden einen rationalen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+ = \mathbb{C}(x, y) \quad \text{mit} \quad x := \frac{s_6^2}{g_2 s_{10}}, \quad y := \frac{g_2^3}{s_6}$$

als einer möglichen Transzendenzbasis.

Hinsichtlich des Körpers aller Modulfunktionen zu $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ erhält man zunächst wieder folgenden Satz, der zum Teil bereits bei Gundlach ([11], Satz 10, S.248) steht:

SATZ 9. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$. Er ist eine quadratische Erweiterung von $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+$ mit

$$z := 4 \frac{s_{15}}{s_3 s_5} \quad (\text{schiefssymmetrisch})$$

als primitivem Element dieser Erweiterung:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = \mathbb{C}(x, y, z) \quad (x, y \text{ wie in Satz 8}) .$$

Aus (56) in Satz 7, S.48 folgt, daß z der folgenden reinquadratischen Gleichung über $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})^+ = \mathbb{C}(x, y)$ genügt:

$$z^2 = (x^3 - 2x^2 + x)y^2 + (-864x^3 + 1800x^2 - 1000x)y + 50000 .$$

Wendet man nun hierauf Lemma 9, S.46 mit

$$K = \mathbb{C}(x), a = x^3 - 2x^2 + x, 2b = -864x^3 + 1800x^2 - 1000x, c = 50000$$

$$\text{und } \alpha := 0, \text{ also } \beta = \sqrt{c} = 100\sqrt{5} \in K$$

an, so folgt unmittelbar

SATZ 10. Der Körper $K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ der Hilbertschen Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist ein rationaler Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 2 über $\mathbb{C}$:

$$K(\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}) = \mathbb{C}(x, t)$$

mit

$$x = \frac{s_6^2}{g_2 s_{10}}, t := \frac{100\sqrt{5} + z}{y} = 100\sqrt{5} \frac{s_6}{g_2} + 4 \frac{s_6 s_{15}}{g_2 s_5} \quad (y, z \text{ wie in Satz 8,9})$$

als einer möglichen Transzendenzbasis. x und t lassen sich beide explizit durch Thetanullwerte darstellen.



L I T E R A T U R

1. Bourget, H.: Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens.
Ann. Fac. Sci. de Toulouse 12, D.1 - D.90 (1898).
2. Eichler, M.: *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1963.
3. Freitag, E.: Zur Theorie der Modulformen zweiten Grades. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1965, 151-157.
4. Freitag, E.: Die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. II. J. reine angew. Math. 254, 1-16 (1972).
5. Geer, G. van der: Hilbert modular forms for the field $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Math. Ann. 233, 163-179 (1978).
6. Geer, G. van der, Zagier, D.: The Hilbert modular group for the field $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$. Inventiones math. 42, 93-133 (1977).
7. Götzky, F.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. 100, 411-437 (1928).
8. Gröbner, W.: *Algebraische Geometrie I*. Mannheim: Bibl. Institut 1968.
9. Grosche, J.: Bemerkungen über Multiplikatoren von Modulformen zu Kongruenzgruppen der Hilbert-Siegelschen Modulgruppe. Acta arith. 33, 187-193 (1977).
10. Gundlach, K.-B.: Quotientenraum und meromorphe Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1960, 77-85.
11. Gundlach, K.-B.: Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 152, 226-256 (1963).
12. Gundlach, K.-B.: Zusammenhänge zwischen Modulformen in einer und in zwei Variablen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1965, 47-88.
13. Gundlach, K.-B.: Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen. J. reine angew. Math. 220, 109-153 (1965).
14. Hammond, W.F.: The modular groups of Hilbert and Siegel. Am. J. Math. 88, 497-516 (1966).
15. Hammond, W.F.: The Hilbert modular surface of a real quadratic field. Math. Ann. 200, 25-45 (1973).
16. Hecke, E.: Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. *Mathematische Werke* Nr. 1, S. 21-58 (Math. Ann. 71, 1-37 (1912))[Dissertation]. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 2. Aufl. 1970.
17. Hecke, E.: Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen. *Mathematische Werke* Nr. 4, S. 69-114 (Math. Ann. 74, 465-510 (1913))[Habilitationsschrift].

18. Hecke, E.: Analytische Funktionen und algebraische Zahlen II. *Mathematische Werke* Nr. 20, S.381-404 (Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 3, 213-236 (1924)).
19. Hermann, C.F.: Symmetrische Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Math. Ann. 256, 191-197 (1981) = gekürzte und revidierte Fassung von: Symmetrische Hilbertsche Modulformen zu $\sqrt{17}$. Dissertation. Univ. Heidelberg 1978.
20. Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Enseignement Math. 19, 183-281 (1973).
21. Hirzebruch, F.: Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein. Russian Math. Surveys 31:5, 96-110 (1976), from Uspekhi Mat. Nauk 31:5, 153-166 (1976).
22. Hirzebruch, F.: The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant. In: *Modular Functions of One Variable VI (Proceedings, Bonn 1976)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 627, S. 287-323. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.
23. Hirzebruch, F.: Überlagerungen der projektiven Ebene und Hilbertsche Modulflächen. L'Enseignement Math. 24, 63-78 (1978).
24. Hirzebruch, F., Zagier, D.: Classification of Hilbert modular surfaces. In: *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, ed. by W.L. Baily & T. Shioda, Iwanami Shoten and Cambridge Univ. Press 1977, S. 43-77.
25. Igusa, J.: On Siegel modular forms of genus two. Am. J. Math. 84, 175-200 (1962).
26. Igusa, J.: On Siegel modular forms of genus two (II). Am. J. Math. 86, 392-412 (1964).
27. Igusa, J.: On the graded ring of theta-constants. Am. J. Math. 86, 219-246 (1964).
28. Igusa, J.: Modular forms and projective invariants. Am. J. Math. 89, 817-855 (1967).
29. Igusa, J.: *Theta Functions*. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer 1972.
30. Klingen, H.: Zur Struktur der Siegelschen Modulgruppe. Math. Z. 136, 169-178 (1974).
31. Leutbecher, A.: Euklidischer Algorithmus und die Gruppe GL_2 . Math. Ann. 231, 269-285 (1978).
32. Maaß, H.: Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Ann. 117, 538-578 (1940/41).
33. Maaß, H.: Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $\mathbb{R}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 118, 65-84 (1941/43).
34. Maaß, H.: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. 232, 163-175 (1978).

35. Müller, R.: Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu den Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$. Diplomarbeit. Univ. Freiburg i.Br. 1978.
36. Rankin, R.A.: *Modular Forms and Functions*. Cambridge-London-New York-Melbourne: Cambridge Univ. Press 1977.
37. Resnikoff, H.L.: On the graded ring of Hilbert modular forms associated with $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 208, 161-170 (1974).
38. Resnikoff, H.L., Saldaña, R.L.: Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. J. reine angew. Math. 265, 90-109 (1974).
39. Resnikoff, H.L., Tai, Y.-S.: On the structure of a graded ring of automorphic forms on the 2-dimensional complex ball. Math. Ann. 238, 97-117 (1978).
40. Serre, J.-P.: *Cours d'arithmétique*. Paris: Presses Univ. de France 1970.
41. Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. of Math. 77, 33-71 (1963).
42. Siegel, C.L.: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. *Gesammelte Abhandlungen IV*, Nr. 89, S. 82-97 (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1969, 87-102). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979.
43. Vaserštein, L.N.: On the group SL_2 over Dedekind rings of arithmetic type. Math. USSR Sbornik 18, No. 2, 321-332 (1972), *from* Mat. Sbornik 89(131), No. 2, 313-330 (1972).
44. Weiss, E.: *Algebraic Number Theory*. New York-San Francisco-Toronto-London: McGraw-Hill 1963.
45. Witt, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, 323-337 (1941).
46. Zagier, D.: On the values at negative integers of the zeta-function of a real quadratic field. L'Enseignement Math. 22, 55-95 (1976).

